それでは，前回の解答です.

第１問（数 III 標準）

座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問いに答えよ.

(1)　点 P と原点 O との距離を求めよ.

(2)　点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $\left|\vec{v}\right|$ を求めよ.

(3)　積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ.

＜解答＞

(1)

$$\mathrm{OP}^2=\left(\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}\right)^2+\left(\frac{3\sin t}{5+4\cos t}\right)^2$$

$$=\frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=\frac{16+40\cos t+16\cos^2 t+9}{(5+4\cos t)^2}$$

$$(\because\ \cos^2 t+\sin^2 t=1)$$

$$=\frac{(5+4\cos t)^2}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=1$$

である．$\mathrm{OP}>0$ であるから

$$\mathrm{OP}=1$$

である.

(2)

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-5\sin t(5+4\cos t)+4\sin t(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=\frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=3\cdot\frac{\cos t(5+4\cos t)+4\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2}$$

$$=\frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}$$

であるから

$$\vec{v}=\left(\frac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)$$

である．さらに

$$\vec{v}=\frac{3}{5+4\cos t}\left(\frac{-3\sin t}{5+4\cos t},\ \frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}\right)$$

$$\left(=\frac{3}{5+4\cos t}(-y,\ x)\right)$$

である.

$$5+4\cos t>0$$

に注意して，(1) の計算を用いると

$$\left|\vec{v}\right|=\frac{3}{5+4\cos t}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\frac{3}{5+4\cos t}$$

である.

(3)　(1) より点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上にある．t が $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲を動くとき, 点 P の軌跡を考える.

$$\cos t=-\frac{4}{5}$$

となる角 t が $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲にただ 1 つ存在するので，これを α とおく．すなわち

$$\cos\alpha=-\frac{4}{5},\quad \sin\alpha=\frac{3}{5}$$

である.

すると，増減表は次のようになる.

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$		$-$		$-$	
x	1	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	-1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

よって，点 P の軌跡は

円 $x^2+y^2=1$ の $y\geqq 0$ の部分

である.

点Pの x 座標が1から -1 に単調に減少することに注意すると，点Pが動いた道のりは

$$\int_0^{\pi}\left|\overrightarrow{v}\right|dt=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi$$

(単位円の円周の長さの半分)

である．これと(2)より

$$\int_0^{\pi}\frac{3}{5+4\cos t}dt=\pi$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}=\frac{\pi}{3}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．今回は数Ⅲの微分・積分の総合問題を出題しました．(1)，(2)を正しく処理して，それを(3)にどう活かすかを考える必要があります．(3)の出題の仕方が新鮮で，意味が分かると嬉しくなります．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1)　2点間の距離公式で計算しましょう．きれいになるんだろうなと思いながら計算すると，本当にきれいになります．全部を展開しても良いのですが，分母は揃っていますのでそのままにしておいて分子だけ整理するのが良いでしょう．

$$\begin{aligned}&25\cos^2 t+9\sin^2 t\\&=25\cos^2 t+9(1-\cos^2 t)\\&=16\cos^2 t+9\end{aligned}$$

とすると，分母と同じ形が出てきます．

(2)　速度ベクトルとその大きさ(速さ)を求める問題です．問題文にある通り，速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ は

$$\overrightarrow{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\quad(\text{位置の微分})$$

で求めます．商の微分公式で丁寧に計算してください．速さに関しては

$$\left|\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

を計算します．そのまま計算しても良いですが

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3}{5+4\cos t}\cdot(-y)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{5+4\cos t}\cdot x$$

であることに気付くと，(1)から $x^2+y^2=1$ なので楽に求めることができます．

(3)　勝負はこの設問です．この積分をノーヒントで出されたら，多くの受験生が困ってしまうと思います．この問題が解けるのは(1)，(2)があるからで，誘導に乗ろうという姿勢が大事になります．(当たり前だと思うかもしれませんが，夏期の高3生の答案を見ていると，その意識がまだまだ不十分な人もいるなという印象です)．

さて，(2)を正しく計算できた人なら

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{5+4\cos t}dt=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left|\overrightarrow{v}\right|dt$$

となることは分かると思います．したがって

$\int_0^{\pi}\left|\overrightarrow{v}\right|dt$ の意味が分かればこの問題は解けます(積分を計算するのではなく，その表す意味を考えるのが斬新ですね)．

ここで用いるのが次の＜公式＞です．

＜公式＞

点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ が $\alpha\leqq t\leqq\beta$ の間に動いた道のり(描く曲線の長さ) l は

$$l=\int_\alpha^\beta\left|\overrightarrow{v}\right|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

少しざっくりした話になりますが，dt というのは「微小時間(の極限)」というイメージをもってください．$\left|\overrightarrow{v}\right|dt$ というのが，微小時間に点Pが

進んだ (直線) 距離です．これを寄せ集め (積分) することで曲線の長さを求めています．すなわち，曲線を細かい折れ線で近似して，その折れ線の和の極限として曲線の長さを求めます．このようなイメージをもつことで，公式が覚えやすくなり，間違って覚えることを防ぐこともできます．

ちなみに，パラメータ表示されていない曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ l を求めよと言われたら，$(x,\ f(x))$ とパラメータ表示されていると考えて

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \end{aligned}$$

で求められます．これも合わせておさえておきましょう．

さて，話を問題に戻します．というわけで $\displaystyle\int_0^\pi \left|\overrightarrow{v}\right| dt$ は，$0 \leqq t \leqq \pi$ において点 P が動いた道のりです．(1) で点 P は単位円 $x^2+y^2=1$ 上にあることが言えていますので，この円上のどの部分を動くかを考えます．(2) で求めた速度ベクトルを見ると，解答の増減表のように動くことが分かります．x 座標が単調減少なので，同じところを 2 回通ったりはしていないことも分かります．(1)，(2) で求めていたことすべてがきれいにつながって，(3) の答えが出るというわけです．

ここからは少し発展的な内容を述べます．(3) の積分ですが，誘導無しで計算するには次のようにします．

前々回の問題で笹谷先生も触れていましたが，$\sin t$，$\cos t$ を含む積分に対して

$$u = \tan\frac{t}{2}$$

と置換するテクニックがあります．このとき

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1}{5+4\cos t} = \frac{1}{5+4\cdot\dfrac{1-u^2}{1+u^2}} = \frac{1+u^2}{9+u^2}$$

です．さらに

$$du = \frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}$$

$$du = \frac{1+u^2}{2}dt \quad \left(\because\ \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}} = 1+\tan^2\frac{t}{2}\right)$$

$$dt = \frac{2}{1+u^2}du$$

となり，積分区間は

t	$0 \to \pi$
u	$0 \to \infty$

となります．u の積分区間に ∞ が現れますが

$$\int_0^\infty = \lim_{M\to\infty}\int_0^M$$

と見てください (広義積分と言って，大学範囲です)．したがって

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dt}{5+4\cos t} &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{1+u^2}{9+u^2}\cdot\frac{2}{1+u^2}du \\ &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{2}{9+u^2}du \end{aligned}$$

となります．さらに

$$u = 3\tan\theta$$

と置換すると

$$\tan\beta = \frac{M}{3},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

となる β に対して

$$du=\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta,\quad \begin{array}{c|c} u & 0\to M \\ \hline \theta & 0\to\beta \end{array}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{2}{9+u^2}du \\
&=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^\beta \frac{2}{9(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta \\
&=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^\beta \frac{2}{3}d\theta \quad \left(\because\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right) \\
&=\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{2}{3}\beta \\
&=\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

と求まります(出題者が求めている解法ではないと思います).

さて，最後に問題の冒頭で与えられているパラメータ表示

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t} \quad \cdots\cdots (*)$$

について考えたいと思います．(1) で求めた通り，これは単位円 $x^2+y^2=1$ のパラメータ表示になっています．単位円のパラメータ表示として，まず思いつくのは

$$(\cos\theta,\ \sin\theta) \quad \cdots\cdots (**)$$

だと思いますが，他にも

$$\left(\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \frac{2u}{1+u^2}\right)$$

という表示があるのはご存知でしょうか？これは $(**)$ の θ に対して

$$u=\tan\frac{\theta}{2}$$

と置換したもので

$$\begin{aligned}
\cos\theta&=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
&=\frac{1-u^2}{1+u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\theta&=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
&=\frac{2u}{1+u^2}
\end{aligned}$$

として導けます．$\sin\theta$，$\cos\theta$ を含む積分で $u=\tan\frac{\theta}{2}$ と置換するのもこれが背景です．さらにこのパラメータ表示で

$$u=\frac{1}{3}\tan\frac{t}{2}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
x&=\frac{1-u^2}{1+u^2}=\frac{1-\frac{1}{9}\tan^2\frac{t}{2}}{1+\frac{1}{9}\tan^2\frac{t}{2}} \\
&=\frac{9\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{9\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} \\
&=\frac{9\cdot\frac{1+\cos t}{2}-\frac{1-\cos t}{2}}{9\cdot\frac{1+\cos t}{2}+\frac{1-\cos t}{2}} \\
&=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y&=\frac{2u}{1+u^2}=\frac{\frac{2}{3}\tan\frac{t}{2}}{1+\frac{1}{9}\tan^2\frac{t}{2}} \\
&=\frac{6\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{9\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} \\
&=\frac{3\sin t}{9\cdot\frac{1+\cos t}{2}+\frac{1-\cos t}{2}} \\
&=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}
\end{aligned}$$

となって，$(*)$ の表示が得られます．したがって，(1) の結論が成り立つわけです．

それでは，最後にもう 1 問曲線の長さに関する問題を出題しておきます．正しく積分して答えを出しきってください．

強者の戦略

問

曲線 $y=\log(1+\cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ.

＜解答＞

$$y'=\frac{-\sin x}{1+\cos x}$$

であるから，求める曲線の長さ l は

$$\begin{aligned}
l&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)^2}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+\cos x}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)}\,dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{1-\sin\frac{x}{2}}\right)dx\\
&=\Big[\log\left|1+\sin\frac{x}{2}\right|-\log\left|1-\sin\frac{x}{2}\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&=\log(\sqrt{2}+1)^2\\
&=2\log(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

である.

＜解答終＞

正しく求められたでしょうか？(今年度の京大で出題された問題です). ポイントは2つで

・積分立式後の $\sqrt{\ }$ を半角の公式で外せるか

・$\dfrac{1}{\cos\theta}$ の積分ができるか

(分母分子に cos をかけて部分分数分解)

を確認してください. 積分に関しては

$$\tan\frac{x}{4}=u$$

と置換しても計算できます.

それでは今回はここまでにしておきます. また次回.

(数学科　川﨑)