強者の戦略

今回の問題は (1) が今春の京都大学でも出題された「平面に下ろした垂線の足の座標」を求めるもので，(2) は空間内で座標平面に平行でない平面上の円周上の動点の座標に関するものでした．

それでは，まず問題の確認です．

> 問題
>
> xyz 空間内の 3 点 A(1，0，0)，B(0，-1，0)，C(0，0，2) を通る平面 α に点 O(0，0，0) から下ろした垂線の足を H とする．
>
> また，平面 α 上の円で，H を中心とする半径 2 の円を C とする．
>
> (1) 点 H の座標を求めよ．
>
> (2) C 上の動点 P の x 座標の最大値を求めよ．

(1) は 2 つの解法が考えられます．

1 つ目は共通テストでも問われそうな解法です．

原点 O から平面 α に下ろした垂線の足 H は，当然 α 上にあるので，ベクトル方程式で $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表わして，平面 α との垂直条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となり，s と t の値が定まって，H の座標が求まるというもの．

2 つ目は平面 α の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の正射影ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を求めるものです．

$\overrightarrow{n}$ の求め方としては，

① $\overrightarrow{n}=(a,\ b,\ c)$ とおいて $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から $\overrightarrow{n}$ を求める．

② 計算用紙で $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の外積を計算する．

③ 平面 α と各座標軸の交点を利用して α の方程式を立て，x，y，z の係数から $\overrightarrow{n}$ を求める．

などが考えられます．

解答は 2 つ目の解法で示します．法線ベクトルは②の外積を計算する方法で求めます．答案の書き方に注意が必要です．外積を使った痕跡を残してはいけません．皆さんは，1 つ目の解法でもチャレンジしてみて下さいね．

(1)【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 2)$ 対して，

$\overrightarrow{n}=(2,\ -2,\ 1)$ をとると，$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ となり，3 つのベクトルはすべて $\overrightarrow{0}$ ではないので，$\overrightarrow{n}$ は平面 α の法線ベクトルの 1 つである．

よって，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{n}$ とでき，

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{n}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right)=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\left|\overrightarrow{n}\right|$ より，

$k=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{n}\right|^2}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{n}\right|^2}\right)\overrightarrow{n}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{n}$ となるので，求める点 H の座標は $\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ である．

(2) は，かなり難しかったでしょうか．

代表的な解法は 2 つ考えられます．

1 つ目は，円 C の方程式を平面 α と点 H を中心とする半径 2 の球面 S の連立方程式で与え，z を消去することで C の xy 平面への正射影の方程式を求めて，これを y の 2 次方程式と考え，実数 y の存在条件から x のとりうる値の範囲を求めて，最大値を得るもの．

2 つ目は，平面 α 上のある単位ベクトル $\overrightarrow{a}$ と法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて，円 C 上の動点 P を $\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて表すものです．

解答は両方とも示します．

(2)【解答 1】

点 H を中心とする半径 2 の球面 S の方程式は

$$\left(x-\frac{4}{9}\right)^2+\left(y+\frac{4}{9}\right)^2+\left(z-\frac{2}{9}\right)^2=4$$

であり，平面 α 上の動点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ として平面 α のベクトル方程式は，$\overrightarrow{n}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$ であるから，これを成分で表わして，$2x-2y+z-2=0$ である．円 C は球面 S と平面 α の交わりの円であるから，C と α を連立して z を消去すると，C の xy 平面への正射影の方程式として $45y^2-72(x-1)y+45x^2-72x-4=0$ を得る．

これを y の 2 次方程式とみて，実数 y の存在条件を考える．

判別式を D として $\dfrac{D}{4} \geqq 0 \iff 81x^2-72x-164 \leqq 0$ より，動点 P の x 座標のとりうる値の範囲は，

$$\frac{4-6\sqrt{5}}{9} \leqq x \leqq \frac{4+6\sqrt{5}}{9}$$

である．

よって求める x の最大値は，$x=\dfrac{4+6\sqrt{5}}{9}$ である．

(2)【解答２】

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\dfrac{1}{9}(5,\ 4,\ -2)$ と $\vec{n}$ に対して $\vec{m}=(0,\ 1,\ 2)$ を取ると，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{m}\cdot\vec{n}=0$ であるから，円 C 上の動点 P は

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+2\cos\theta\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{HA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|}+2\sin\theta\dfrac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$ と表せるので，P の x 座標は，$x=\dfrac{4}{9}+2\cos\theta\cdot\dfrac{5}{3\sqrt{5}}+2\sin\theta\cdot 0=\dfrac{4}{9}+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\cos\theta$ となる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから，$\theta=0$ のとき x は最大となり，最大値は $\dfrac{4}{9}+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ である．

【解答２】は，xy 平面上での点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円周上の動点 P の表し方を深く理解していれば，その応用に過ぎません．

我々は点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)+r(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表しますが，$r(\cos\theta,\ \sin\theta)$ の部分は，互いに垂直な 2 つの単位ベクトル $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を用いて，

$$r(\cos\theta,\ \sin\theta)=r\cos\theta(1,\ 0)+r\sin\theta(0,\ 1)$$

と考えているのです．平面 α 上で互いに垂直な 2 つの単位ベクトル $\vec{m}$ と $\vec{n}$ をとることで，同様に考えることができます．

いかがでしたか．しっかりと復習して来るべき受験に備えて下さい．

研伸館　数学科　髙木　克夫