それでは解説です．

問題（数 III）

以下の問に答えよ．

(1)　$\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\sin\dfrac{\pi}{16}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\sqrt{2}\,,\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．このとき

$$\lim_{n\to\infty}a_n\,,\ \lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-a_n}$$

をそれぞれ求めよ．

《解答》

(1)
$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

である．$\cos\dfrac{\pi}{8}>0$ であるから

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

である．また

$$\sin^2\frac{\pi}{16}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$$

である．$\sin\dfrac{\pi}{16}>0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

である．

(2)
$$a_1=\sqrt{2}>0$$

であり，$a_k>0$ のとき

$$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}>0$$

であるから，帰納的にすべての自然数 n に対して

$$a_n>0$$

である．よって

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-2|&=\left|\sqrt{2+a_n}-2\right|\\&=\left|\frac{a_n-2}{\sqrt{2+a_n}+2}\right|\\&\leqq\left|\frac{a_n-2}{\sqrt{2+0}+2}\right|\quad (\because\ a_n\geqq 0)\\&=\frac{1}{2+\sqrt{2}}|a_n-2|\end{aligned}$$

$$\therefore\ |a_{n+1}-2|\leqq\frac{1}{2+\sqrt{2}}|a_n-2|$$

が成り立つ．n が十分大のとき，繰り返し用いて

$$|a_n-2|\leqq\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cdot|a_1-2|$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cdot|a_1-2|=0$$

$$\left(\because\ \left|\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right|<1\right)$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-2|=0\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=2$$

である．

次に，すべての自然数 n に対して

$$\sqrt{2}\leqq a_n<2\quad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(I)　$n=1$ のとき

$$a_1=\sqrt{2}$$

より，$(*)$ は成り立つ．

(II)　$n=k\ (k\geqq 1)$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\sqrt{2}\leqq a_k<2$$

成り立つ．このとき

$$2+\sqrt{2}\leqq 2+a_k<4$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\leqq\sqrt{2+a_k}<2$$

$$\therefore\ \sqrt{2}\leqq a_{k+1}<2$$

より，$n=k+1$ でも $(*)$ は成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．よって

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\frac{a_n}{2}<1$$

であるから，$0<\theta_n \leqq \dfrac{\pi}{4}$ として

$$\frac{a_n}{2}=\cos(\theta_n) \qquad \therefore\ a_n=2\cos(\theta_n)$$

とおくことができる．このとき

$$a_{n+1}=2\cos(\theta_{n+1})$$

であり，また

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sqrt{2+a_n}\\&=\sqrt{2+2\cos(\theta_n)}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos(\theta_n)}\\&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}\\&=2\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\ \left(\because\ \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)>0\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\cos(\theta_{n+1})=\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

である．$\dfrac{\theta_n}{2}$，θ_{n+1} はともに鋭角であるから

$$\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

である．よって，数列 $\{\theta_n\}$ は初項：$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$，公比：$\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$\theta_n=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\therefore\ a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

である．

よって

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-a_n}\\&=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}\\&=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}\\&=\lim_{n\to\infty}2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\ \left(\because\ \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}>0\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=1\cdot\frac{\pi}{2}\ \left(\because\ n\to\infty \text{ のとき，} \frac{\pi}{2^{n+2}}\to 0\right)\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である．

****

《解説》

(1) は 2 倍角・半角の公式を用いて計算するだけです．ただ，(2) の誘導かもしれないことは留意しておく必要があります．

(2) は漸化式で与えられた「数列の極限」です．ルートを含む漸化式のため，例えば

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$$

であれば，両辺正を示してから底が 2 の対数をとることで

$$\log_2 a_{n+1}=\log_2\sqrt{2a_n}$$

$$\therefore\ \boxed{\log_2 a_{n+1}}=\frac{1}{2}\boxed{\log_2 a_n}+\frac{1}{2}$$

と，一般項が求まる形に変形できます．今回の問題の場合は，対数をとっても

$$\log a_{n+1}=\log\sqrt{2+a_n}$$

$$\therefore\ \log a_{n+1}=\frac{1}{2}\log(2+a_n)$$

となり，上手くいきません．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めるときの定石の 1 つ

$$\boxed{\begin{gathered}|a_{n+1}-\alpha|\leqq M|a_n-\alpha|\\ (M \text{ は } 0<M<1 \text{ の定数})\end{gathered}}$$

を用いましょう．解答では後で数学的帰納法で $a_n<2$ を示していますが，先に示してから

$$2-a_{n+1}\leqq M(2-a_n)$$

を作っても構いません．不等式の作り方は

漸化式を左辺に代入

or

平均値の定理

です．平均値の定理を用いるならば次のようになります．

****

($a_n>0$ を示した後に)

$f(x)=\sqrt{2+x}$ とおく．

関数 $f(x)$ は $x \geqq -2$ で連続，$x>-2$ で微分可能であるから，$a_n \neq 2$ のとき，平均値の定理より

$$\frac{f(2)-f(a_n)}{2-a_n}=f'(c_n)$$

となる実数 c_n が a_n と 2 の間に存在する．

$a_n>0$，$2>0$ より

$$c_n>0$$

であり

$$f(2)=2,\ f(a_n)=a_{n+1},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

あるから

$$\frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}=\frac{1}{2\sqrt{2+c_n}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{2+0}}$$

$$\frac{|2-a_{n+1}|}{|2-a_n|} \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ |2-a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2\sqrt{2}}|2-a_n|$$

である．$a_n=2$ でも，この不等式は成り立つ．

(以下同様)

****

c_n の部分は，教科書の公式では c ですが，a_n の n に依存する数なので，c_n とするのが良いでしょう．

$\lim_{n \to \infty} 2^n\sqrt{2-a_n}$ は単独では難問です．ヒントを上手く利用する必要があります．

漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ と似た形が

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{2\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2+\boxed{2\cos\frac{\pi}{4}}}$$

で登場しています．よって，$a_n=2\cos(\theta_n)$ と置きたくなりますが

$$-2 \leqq 2\cos(\theta_n) \leqq 2$$

と範囲が限定されるため，a_n の範囲がこの中にあるか確認する必要があります．

あとはルートを外して三角関数の極限公式を用いて不定形から脱しましょう．

また，漸化式は

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{1+a_n}}{2}$$

の形で与えられることもあります．過去問では大抵，cos が関わることがヒントとして与えられているので，上手く利用できるようにしましょう．

今回の問題のように，数列の問題の裏に三角関数が隠れている問題は他にもあります．

次の問で一般項を考えてみてください．

問題

以下の式で定義される数列の一般項 a_n をそれぞれ求めよ．ただし，a は $0<a<1$ を満たす定数とし，$\sin\alpha=a$，$\cos\beta=a$ とする．(α，β は鋭角)

(1)　$a_1=a$，$a_{n+1}=4a_n^3-3a_n$　($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$)

(2)　$b_1=a^2$，$b_{n+1}=4b_n(1-b_n)$　($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$)

《解答》

(1)　すべての自然数 に対して

「$a_n=\cos(3^{n-1}\beta)$」 …… $(*)$

を数学的帰納法で証明する．

(I)　$n=1$ のとき

$$\cos\beta=a=a_1$$

より，$(*)$ は成り立つ．

(II)　$n=k\ (k \geqq 1)$ で $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$a_k=\cos(3^{k-1}\beta)$$

である．このとき

$$\begin{aligned} a_{k+1}&=4a_k^3-3a_k \\ &=4\cos^3(3^{k-1}\beta)-3\cos(3^{k-1}\beta) \\ &=\cos(3^k\beta) \end{aligned}$$

より，$n=k+1$ でも $(*)$ は成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 n で $(*)$ は成り立つ．

(2)　すべての自然数 に対して

「$b_n = \sin^2(2^{n-1}\alpha)$」 …… $(**)$

を数学的帰納法で証明する.

(I)　$n=1$ のとき

$$\sin^2\alpha = a^2 = b_1$$

より，$(**)$ は成り立つ.

(II)　$n=k\ (k \geqq 1)$ で $(**)$ が成り立つと仮定すると

$$b_k = \sin^2(2^{k-1}\alpha)$$

である．このとき

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 4b_k(1-b_k) \\ &= 4\sin^2(2^{k-1}\alpha)\left\{1-\sin^2(2^{k-1}\alpha)\right\} \\ &= \left\{2\sin(2^{k-1}\alpha)\cos(2^{k-1}\alpha)\right\}^2 \\ &= \sin^2(2^k\alpha) \end{aligned}$$

より，$n=k+1$ でも $(**)$ は成り立つ.

(I)，(II) より，すべての自然数 n で $(**)$ は成り立つ.

****

いかがだったでしょうか．(1) の $4a_n^3-3a_n$ の形や $y=4x^3-3x$ の形からは，cos の 3 倍角の公式を連想できたでしょうか.

帰納法を使わずに示そうとすると，(1) なら

> $(-1 \leqq a_n \leqq 1$ を示したあとに$)$
>
> $$a_n = \cos(\theta_n) \quad (0 \leqq \theta_n \leqq \pi)$$
>
> とおくと
>
> $$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4\cos^3(\theta_n) - 3\cos(\theta_n) \\ &= \cos(3\theta_n) \end{aligned}$$
>
> である．$a_{n+1} = \cos(\theta_{n+1})$ であるから
>
> $$\cos(\theta_{n+1}) = \cos(3\theta_n)$$
>
> である.

までは同様に進めますが，$\theta_{n+1} = 3\theta_n$ とは確定しません.

$0 \leqq \theta_{n+1} \leqq \pi$，$0 \leqq 3\theta_n \leqq 3\pi$ より

$$\theta_{n+1} = 3\theta_n,\ 2\pi - 3\theta_n,\ 3\theta_n - 2\pi$$

と，$3\theta_n$ が $[0,\ \pi]$，$[\pi,\ 2\pi]$，$[2\pi,\ 3\pi]$ のどの区間にあるかで結果が変わってきます.

こういうときは帰納法で，予想される一般項を示しにいきましょう.

(2) はヒントなしでは難しいですが，三角関数を利用するという前提から，sin の 2 倍角の公式を使うことを見抜きたいです.

様々な単元を組み合わせて解くのが，楽しさでもあり，難しさでもあります．先入観にとらわれず，広い思考で考えていきましょう.

それでは今回はここまでにしたいと思います.

（数学科　松浦）