強者の戦略

それでは，前回の解答です．

## 第 1 問（数 III）

自然数 $n$ に対し $f_n(x)=x^{-1+\frac{1}{n}}$ $(x>0)$ とおく．

また，正の実数 $a_n$ は $\int_1^{a_n} f_n(x)\,dx=1$ を満たすものとする．

(1)　関数 $f_n(x)$ の不定積分を求めよ．

(2)　$a_n$ の値と極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．また，正の実数 $b_n$ が $\int_1^{b_n} f_{n+1}(x)\,dx=-1$ を満たすとき，$b_n$ の値と極限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(3)　2 以上の自然数 $k$ に対して $\int_{k-1}^{k} f_n(x)>\frac{1}{k}$ を示し，これを利用して $a_n<4$ を証明せよ．

(4)　$\int_1^{a_n} f_{n+1}(x)\,dx<1$ を示し，これを利用して $a_n<a_{n+1}$ を示せ．

＜解答＞

(1)

$$\int f_n(x)\,dx=\int x^{-1+\frac{1}{n}}\,dx$$
$$=nx^{\frac{1}{n}}+C$$

($C$ は積分定数 )

である．

(2)　(1) より

$$n\left(a_n^{\frac{1}{n}}-1\right)=1$$
$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

である．また

$$\int_1^{b_n} f_{n+1}(x)\,dx=\left[\ (n+1)x^{\frac{1}{n+1}}\ \right]_1^{b_n}$$
$$=(n+1)\left(b_n^{\frac{1}{n+1}}-1\right)$$

であるから

$$(n+1)\left(b_n^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=-1$$
$$b_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^{-(n+1)\cdot(-1)}$$
$$=e^{-1}$$

である．

(3)　2 以上の自然数 $k$ に対して，$k-1\leqq x\leqq k$ において

$$f_n(x)\geqq x^{-1}\geqq\frac{1}{k}$$

であるから

$$\int_{k-1}^{k} f_n(x)\,dx>\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,dx=\frac{1}{k}$$

である．すると

$$\int_1^4 f_n(x)\,dx=\int_1^2 f_n(x)\,dx+\int_2^3 f_n(x)\,dx+\int_3^4 f_n(x)\,dx$$
$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{13}{12}$$
$$>1$$
$$=\int_1^{a_n} f_n(x)\,dx$$

であり，$x\geqq 1$ において $f_n(x)>0$ であるから

$$a_n<4$$

である．

(4)　$x\geqq 1$ において，$0<f_{n+1}(x)\leqq f_n(x)$ であり，この等号は常には成立しないので

$$\int_1^{a_n} f_{n+1}(x)\,dx<\int_1^{a_n} f_n(x)\,dx=1$$

である．さらに

$$\int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x)dx=1$$

であるから，今示した不等式から

$$\int_1^{a_n} f_{n+1}(x)dx<\int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x)dx$$

であり，$x \geqq 1$ において $f_{n+1}(x)>0$ より
$a_n<a_{n+1}$ が成り立つ．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．2022 年一発目の出題です．
今年もよろしくお願いします．

今回は積分と極限の融合問題を出題しました．出題時に述べた「ある数」，すなわち $e$ の評価を積分を使ってやってみようという問題です．

以下，設問ごとに補足を述べます．

(1)　これは計算するだけです．$x^r$ の積分は $r=-1$ のときを分けなくてはいけませんが，本問では

$$-1+\frac{1}{n}>-1$$

ですので，場合分けの必要はありません．

(2)　(1) から，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が $e$ の定義の極限になることが分かります．$e$ がからむ極限公式としては

(i)　$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(ii)　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

(iii)　$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

(iv)　$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

(v)　$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

の 5 つをおさえておいてください．

$b_n$ についても同様に積分を計算します ( 右辺が 1 ではなく $-1$ になっていることに注意 ).
すると

$$b_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

という形になることが分かります．これを

$$\left\{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^{-(n+1)\cdot(-1)}$$

と変形することで極限を求めることができます．

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right\}^{-(n+1)}=e \quad \cdots\cdots (*)$$

なのですが，これについて補足します．公式 (ii) の右側，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ の形と見ると，$\frac{1}{n}$ が $-\frac{1}{n+1}$ となっていて，符号が逆転しているのでこの公式が使えないように見えるかもしれません．しかし，公式 (i) から ( 左極限を考えて )

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

が成り立ちます．したがって $x_n<0,\ \lim_{n\to\infty}x_n=0$ となる数列 $\{x_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$$

となります．本問では

$$x_n=-\frac{1}{n+1}$$

とすることで (*) が得られます．

(3)　前半は積分の不等式を示します．積分の不等式は「中身を比べる」のが基本です．右辺の $\frac{1}{k}$ が何からきているかを考えると，$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}dx$ だと分かると思います．積分区間の幅が 1 であることにも注意しましょう．すると，$k-1 \leqq x \leqq k$ において

$$f_n(x)>\frac{1}{k}$$

が言えたら良く，これはこの区間で $f_n(x) \geqq x^{-1}$

が成り立つことから直ちに分かります．

後半は，これを用いて $a_n<4$ を示します．$a_n$ の定義は $\int_1^{a_n} f_n(x)dx=1$ です．したがって

$$\int_1^{a_n} f_n(x)dx<\int_1^{4} f_n(x)dx \quad \cdots\cdots(**)$$

を示すことができれば $f_n(x)>0\ (x\geqq 1)$ に注意して，$a_n<4$ が示せます．このように，**「積分の値の大小関係から，積分区間の端の大小関係が分かる」**というのが目新しくて面白い問題だと思います．(**) に関しては，右辺を

$$\int_1^{2} f_n(x)dx+\int_2^{3} f_n(x)dx+\int_3^{4} f_n(x)dx$$

と分けて，これを前半に示した不等式を用いて $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$ で下からおさえることで示せます．

(4)　前半の不等式は，(3) 同様**「中身を比べる」**ために，右辺の 1 を積分の形で表すことを考えます．すると

$$\int_1^{a_n} f_n(x)dx=1$$

ですので，示す式は

$$\int_1^{a_n} f_{n+1}(x)dx<\int_1^{a_n} f_n(x)dx$$

すなわち

$$f_{n+1}(x)<f_n(x)$$

となります．この不等式が $1<x\leqq a_n$ で成り立つことは $f_n(x)$ の定義から明らかです ( ただし，$x=1$ のときは等号が成立 ).

後半は，今示した不等式の右辺の 1 を $\int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x)dx$ に置き換えるのがポイントです．これによって

$$\int_1^{a_n} f_{n+1}(x)dx<\int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x)dx$$

が得られ，$f_{n+1}(x)>0\ (x\geqq 1)$ から $a_n<a_{n+1}$ が従います．

＜参考＞

本問では，$a_n$ を積分で定義して

$a_n<4$ ( 有界性 ) と $a_n<a_{n+1}$ ( 単調性 )

を示しました ( この 2 つが言えると，大学範囲ですが $a_n$ が収束することが言えます ).

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を定義としても，有界性・単調性は示すことができます．それを以下で紹介したいと思います．

＜別解＞

二項定理から

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\\&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots\cdots\{(n-k+1)\}}{k!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\\&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}k!&=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\cdot k\\&\geqq 1\cdot2\cdot2\cdot\cdots\cdots\cdot2\\&=2^{k-1}\end{aligned}$$

( これは $k=1,\ 2$ でも成立 )

であるから

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}&\leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\\&=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\&=3-\frac{1}{2^{n-1}}\\&<3\end{aligned}$$

である．よって

$$a_n<3\,(<4)$$

である．さらに

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad\cdots\cdots①$$

において，$n$ を $n+1$ にすると

$$a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$\cdots\cdots$ ②

となる．① と ② の $\sum$ 内の各項は ② の方が大きく，② の方が項数が 1 多い ($k=n+1$ の分 ) ので $a_n<a_{n+1}$ である．

＜別解終＞

それではもう 1 問，積分の評価に関する問題を出題しておきます．こちらも $e$ の値の評価がテーマの目新しい問題です．

**問**

いわゆる「自然対数の底」を $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ という極限として定義するとき，その値はおよそ 2.718 で，とくに 3 を超えないことが知られている．本問では別の視点からこの事実を再考したい．

(1) 連続関数 $f(x)$ は $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で

$f(x)+f(-x)\geqq 2f(0)$

を満たすとする．このとき

$$\int_1^3 f(x-2)\,dx\geqq 2f(0)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $e$ という数を $\displaystyle\int_1^e\frac{1}{x}dx=1$ を満たす 1 より大きい実数として定義する．このとき，$e\leqq 3$ を示せ．

＜解答＞

(1) $-1\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)+f(-x)\geqq 2f(0)$ であり，$f(x)+f(-x)$ は連続であるから

$$\int_{-1}^1\{f(x)+f(-x)\}dx\geqq\int_{-1}^1 2f(0)\,dx$$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(-x)\,dx\geqq 4f(0)\quad\cdots\cdots ①$$

である．ここで

$$\int_{-1}^1 f(-x)\,dx=\int_1^{-1}f(t)(-dt)\quad(t=-x)$$

$$=\int_{-1}^1 f(t)\,dt$$

であり，定積分は変数によらないので

$$\int_{-1}^1 f(-x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$$

である．

すると，① は

$$2\int_{-1}^1 f(x)\,dx\geqq 4f(0)$$

$$\therefore\ \int_{-1}^1 f(x)\,dx\geqq 2f(0)$$

となる．さらに，$x+2=s$ と置換して

$$\int_1^3 f(s-2)\,ds\geqq 2f(0)$$

$$\therefore\ \int_1^3 f(x-2)\,dx\geqq 2f(0)\quad\cdots\cdots ②$$

である．

(2) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x+2}\quad(x>-2)$

とおくと，$f(x)$ は連続関数である．さらに，曲線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，$-1\leqq x\leqq 1$ において

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}\geqq f\left(\frac{x+(-x)}{2}\right)$$

$$\therefore\ f(x)+f(-x)\geqq 2f(0)$$

が成り立つ．よって，② より

$$\int_1^3\frac{1}{x}dx\geqq 2f(0)=1=\int_1^e\frac{1}{x}dx$$

である．これと，$1\leqq x$ において $\dfrac{1}{x}>0$ であることから

$e\leqq 3$

である．

＜解答終＞

この問題も，積分の値の大小関係から積分区間の端の大小関係が得られる問題です．いかがだったでしょうか？

# 強者の戦略

(1) は与えられた不等式を積分して左辺の形を示す式の形に合わせていきます．積分に慣れていないと難しく感じると思います．(2) は (1) をどう使うかがポイントです．$e$ の定義から $\dfrac{1}{x}$ の積分が出てくるように

$$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

とおいて (1) の仮定をみたすことをチェックします．そして (1) の不等式を使ってみると，積分区間の広さによって，$e \leqq 3$ が得られるというわけです．

それでは今回は以上にしたいと思います．受験生の方はいよいよ本番ですね．体調には気を付けて乗り切ってきてください．来年以降に受験生になられる方は，今後もこのページをよろしくお願いします．

（数学科　川﨑）