強者の戦略

今回は 2021 年度入試の上智大学／経済学部・理工学部の過去問を，マーク式から記述式に改題，および，一部抜粋して出題しました．以下，問題を確認してみましょう．

問題

南北方向に m 区画，東西方向に n 区画に区切られた長方形の土地がある．この土地のそれぞれの区画に m 種類の作物を 1 種類ずつ植える．ただし，南北方向には同じ種類の作物が植えられている区画はないようにする．このとき，東西方向に隣り合う区画に同じ種類の作物が植えられている場合には，それらの区画は連結した 1 個の畑と見なすとする．例えば，南北方向に 3 区画，東西方向に 5 区画で，A，B，C 3 種類の作物を次のように植えた場合，畑が 11 個と見なす．

<table>
<tr><td>A</td><td colspan="3">C</td><td>B</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td>C</td><td>A</td><td>B</td><td colspan="2">A</td></tr>
</table>

(1)　$m=3$ のときを考える．$n=1$ ならば，畑の数は常に 3 個で，1 通りある．$n=2$ ならば，畑の数は 3 個，5 個，6 個のいずれかで，3 通りある．$n=3$ ならば，畑の数は何通りあるか．また，$n=10$ ならば，畑の数は何通りあるか．

(2)　$m=3$ で $n=3$ のとき，畑の数が 8 個になる植え方は何通りあるか．

(3)　$m=6$ のときを考える．各列の南北方向の 6 区画に作物を植える植え方は $6!$ 通りあるが，それらすべてが等確率になるように植えることにする．$n=2$ のとき，畑が 8 個である確率 p と，畑が 10 個である確率 q をそれぞれ求めよ．また，$n=3$ のとき，畑が 10 個である確率を r とする．r が満たす不等式を，以下の (a) ～ (h) の中から 1 つ選べ．

(a)　$r \geqq \frac{1}{100}$　　(b)　$\frac{1}{200} \leqq r < \frac{1}{100}$

(c)　$\frac{1}{500} \leqq r < \frac{1}{200}$　　(d)　$\frac{1}{1000} \leqq r < \frac{1}{500}$

(e)　$\frac{1}{2000} \leqq r < \frac{1}{1000}$　　(f)　$\frac{1}{5000} \leqq r < \frac{1}{2000}$

(g)　$\frac{1}{10000} \leqq r < \frac{1}{5000}$　　(h)　$r < \frac{1}{10000}$

(1) と (2) が (3) のための準備問題になっています．

まずは，(1) について説明します．

［解答］

以下，南北方向の区画の並びを列，東西方向の区画の並びを行と呼ぶことにする．

(1)　$m=3$ のときについて考える．k を自然数とする．1 列目から k 列目（$k=1$，2，……，$n-1$）までを植えているとして，$k+1$ 列目をつけ加える．

k 列目に植えた作物を，上から順に（A，B，C）とする．$k+1$ 列目に植える作物を上から順にどうするかによって，畑の数の増え方は以下のようになる．

(i)　（A，B，C）のとき

畑の数は変化しない．

(ii)　（A，C，B），（C，B，A），（B，A，C）のとき

畑の数は 2 個増える．

(iii)　（B，C，A），（C，A，B）のとき

畑の数は 3 個増える．

以上の増え方は，k 列目の A，B，C の植え方（並べ方）によらず，同様に考えることができる．

以下，南北方向に m 区画，東西方向に n 区画のとき，畑の数が何通りあるかを，a_{m_n} で表すとする．

$n=2$ のとき，畑の数は，問題文より

3，5，6 のいずれか

であり，$a_{3\_2}=3$ である．

$n=3$ のとき，畑の数は (i) ～ (iii) より

$n=2$ のとき 3 ならば，3，5，6 のいずれか

$n=2$ のとき 5 ならば，5，7，8 のいずれか

$n=2$ のとき 6 ならば，6，8，9 のいずれか

である．よって，$n=3$ ならば，畑の数は

3，5，6，7，8，9 のいずれか

であるから，$a_{3\_3}=6$ である．

$n=3$ のときの畑の数から，$n=4$ のときの畑の数への変化を考える．

まず (i) で畑の数が増えず，$n=3$ のときの畑の数が $n=4$ のときの畑の数と等しくなることはある．

次に，$n=3$ のときの畑の数が 7，8，9 のときから (iii) で畑の数が 3 個増え，$n=4$ のときの畑の数が 10，11，12 になることはある．さらに，$n=3$ のときの畑の数の最大値は 9 であるから，$n=4$ のときの畑の数の最大値は 12 である．

また，$k+1$ 列目をつけ加えたとき，畑が 1 個だけ増えることはないので（k 列目と $k+1$ 列目の，ある 1 行以外の作物を同じにすると，残りの 1 行も同じ作物になるため）$n=4$ のときの畑の数が 4 になることはない．

以上より，$n=4$ のときの畑の数は

3 と，5 以上 12 以下の自然数のいずれか

である．

同様に，$n=s$（s は 3 以上の自然数）のときの畑の数が

3 と，5 以上 l 以下の自然数のいずれか

（ただし l は 9 以上の自然数）

のとき，$n=s+1$ のときの畑の数は

3 と，5 以上 $(l+3)$ 以下の自然数のいずれか

である．つまり，畑の数は n が 1 増えると 3 通り増える．

以上より，$n=10$ のとき，畑の数は

$$\begin{aligned} a_{3\_10} &= a_{3\_3}+3(10-3) \\ &= 6+3\cdot 7 \\ &= 27 \quad（通り） \end{aligned}$$

ある．

《解説》

(i)，(ii)，(iii) について，わかりやすいように縦に並べると，以下のようになります．

・(i) のとき

k 列目	$(k+1)$ 列目
A	A
B	B
C	C

・(ii) のとき

k 列目	$(k+1)$ 列目
A	A
B	C
C	B

A	C
B	B
C	A

A	B
B	A
C	C

(ii) について，2 つの列で 3 行のうち 1 行だけ同じ作物を植える場合は，残りの 2 行に植える作物が入れ替わり，畑の数が 2 個増えます．

・(iii) のとき

k 列目	$(k+1)$ 列目
A	B
B	C
C	A

A	C
B	A
C	B

(iii) については，2 つの列で 1 行も同じ作物がないときを考えています．(i) でも (ii) でもないときなので

$3!-1-3=2$

と考えてもよいですが，3 行程度であれば，順番に書き出していけば，以下のような手順ですべてのパターンを見つけることができます．

例えば，A の右に B とする．

B の右に A としたら C の右に C でダメ．

B の右には C が入るしかなく，そのとき，

C の右に A が入り適する．

(i), (ii), (iii) から, $m=3$ のときは, n が1つ増えたときの畑の数の増え方が, $+0$, $+2$, $+3$ の3パターンしかないことがわかります.

$n=3$ のときは, 解答のように具体的に計算すればよいでしょう.

$n=10$ のときは, $n=3$ のときと異なり, 具体的にすべて書き出すのは大変です. ただ, $n=4$ のときの畑の数を具体的に書き出してみると

$n=3$ のとき3ならば, 3, 5, 6のいずれか
$n=3$ のとき5ならば, 5, 7, 8のいずれか
$n=3$ のとき6ならば, 6, 8, 9のいずれか
$n=3$ のとき7ならば, 7, 9, 10のいずれか
$n=3$ のとき8ならば, 8, 10, 11のいずれか
$n=3$ のとき9ならば, 9, 11, 12のいずれか

となるので,「$n=3$ のときの畑の数が3, 5, 6のときに $n=4$ のときの畑の数を考えることは, $n=2$ のときの畑の数が3, 5, 6のときに $n=3$ のときの畑の数を考えるときと考え方が同じだから, $n=3$ のときの畑の数と同じ数は必ず出てくる」こととか,「$n=3$ のときの畑の数が7, 8, 9のとき, 最大で $+3$ できるから, $n=4$ のときの畑の数として10, 11, 12が新しく登場する」ことなどが見えてきます.

$n=5$ のときまで具体的に書き出してしまうと時間が厳しいので, なんとか $n=4$ のときの具体例から

「畑の数の最大値 M は3ずつ増える」
「3以上 M 以下の自然数は, 4以外すべて登場する」

ことに気づきたいです. この特徴に気づければ, マーク式でなく記述解答の場合は

「$+0$ があるから, 1つ前と同じ数は現れる」
「$+3$ があるから, 1つ前の最大値 M に対して, $M-2$, $M-1$, M から $M+1$, $M+2$, $M+3$ が現れる」
「$+1$ がないから, 4は現れない」

などの理由で説明すればよいでしょう.「畑の数が $+1$ されることはない」という点は, 他に比べると気づくのが少し難しいです. (1) では $3!$ 通りのすべての植え方について, 畑の数の増え方を調べているので, なんとか理由も含めて気づきたいです. ここで $+1$ がないことに理由も含めて気づければ, (3) でも活用することができます.

続いて, (2) について説明します.

［解答］

(2)　$m=3$, $n=3$ のときについて考える. k を自然数とする. 1列目から k 列目までを植えているとして, $k+1$ 列目をつけ加える.

(1) の (ii), (iii) より, $k+1$ 列目の植え方は

畑の数が2個増える植え方は3通り　……①
畑の数が3個増える植え方は2通り　……②

ある. (1) と同じ記号を用いると, $a_{3\_3}=8$ となるのは

（ア）$a_{3\_1}=3$, $a_{3\_2}=5$, $a_{3\_3}=8$
（イ）$a_{3\_1}=3$, $a_{3\_2}=6$, $a_{3\_3}=8$

のいずれかのときのみであり, これらに重複する植え方は存在しない. 1列目に植える作物が上から順にA, B, Cのとき. （ア）または（イ）となる植え方の総数は, ①, ② より

$$3\cdot2+2\cdot3=12 \quad (\text{通り})$$

ある. 1列目のA, B, Cの並べ替えも考えて, 求める植え方の数は

$$3!\cdot12=72 \quad (\text{通り})$$

である.

《解説》

列を2回つけ加えて, 畑の数を $+5$ します. (1) から, 列を1回つけ加えるときの畑の数の増え方は, $+0$, $+2$, $+3$ しかないと分かっているので, 2回で $+5$ にするためには, $+2$ と $+3$ が1回ずつ起こるときしかありません. この増え方の組合せ方を考える部分が, (3) で活用できます.

最後に, (1) では k 列目と $k+1$ 列目の作物が同じか異なるかだけに注目していたので, A, B, Cの並べ替えを考察する必要はありませんでしたが, (2) では, 数えたい場合の数が作物の植え方であるた

め，1列目の作物の並び順も影響することに注意しましょう．

さて，ついに(3)の問題にとりかかります．

［解答］

(3)　$m=6$ のときを考える．(1)と同じ記号を用いると，$a_{6\_1}=6$ である．

$n=2$ のときについて，1列目に2列目をつけ加えるとき，畑の数が2個増える（合計8個になる）作物の植え方を考える．6行のうち4行は，1列目と同じ作物を植え，残りの2行については1列目と作物を入れ替えたものを植える植え方なので

$${}_6\mathrm{C}_4=15\text{（通り）}$$

ある．よって

$$p=\frac{6!\cdot 15}{(6!)^2}=\frac{1}{48}$$

である．

$n=2$ のときについて，1列目に2列目をつけ加えるとき，畑の数が4個増える（合計10個になる）作物の植え方を考える．6行のうち2行は，1列目と同じ作物を植える．残りの4行について，例えば1列目に上から順に作物 A, B, C, D を植えたとする．このとき，2列目が以下のいずれかになれば，畑の数は4個増える．

1列目　2列目

1列目	2列目								
A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
B	A	C	D	A	D	D	A	C	C
C	D	D	A	D	A	B	B	A	B
D	C	A	C	B	B	A	C	B	A

よって，畑の数が4個増える作物の植え方は

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot 9=135\text{（通り）}$$

あるので

$$q=\frac{6!\cdot 135}{(6!)^2}=\frac{3}{16}$$

である．

$n=3$ のとき，1列目から k 列目（$k=1$，2）までが植えられているとして，$k+1$ 列目をつけ加えるときの畑の数の増え方について考える．

$n=2$ のときと同様に考えて

畑が2個増える植え方は15通り　……③

畑が4個増える植え方は135通り　……④

ある．また1列目に畑の数が6個あるところから，2列つけ加えることで畑の数が4個増える（合計10個になる）ときを考えているから，1列つけ加えることで畑の数が5個以上増えるときを考える必要はない．

$k+1$ 列目に k 列目と同じ順で作物を植えれば，畑の数は変化しない．その植え方は

1通り　……⑤

である．

また，(1)のときと同様に，畑が1個だけ増える植え方は存在しない．

以上より，$a_{6\_3}=10$ となるのは

（ア）　$a_{6\_1}=6,\ a_{6\_2}=8,\ a_{6\_3}=10$

（イ）　$a_{6\_1}=6,\ a_{6\_2}=6,\ a_{6\_3}=10$

（ウ）　$a_{6\_1}=6,\ a_{6\_2}=10,\ a_{6\_3}=10$

のいずれかのときのみであり，これらに重複する植え方は存在しない．

これらと，③，④，⑤より

$$\begin{aligned} r&=\frac{6!\cdot 15\cdot 15+6!\cdot 1\cdot 135+6!\cdot 135\cdot 1}{(6!)^3}\\ &=\frac{15(15+9+9)}{(6!)^2}\\ &=\frac{11}{11520}\\ &=0.0009\cdots\cdots \end{aligned}$$

である．また

$$\frac{1}{2000}=0.0005$$
$$\frac{1}{1000}=0.001$$

であるから，r が満たす不等式は

$$(e)\quad \frac{1}{2000}\leqq r<\frac{1}{1000}$$

である．

《解説》

まず，$n=2$ のときから解説します．

畑の数が 8 個になるためには，1 列つけ加えることで 2 個増えてほしいので，4 行は左の列と同じ作物を植え，残りの 2 行は植える作物を入れ替えるしかありません．

畑の数が 10 個になるためには，1 列つけ加えることで 4 個増えてほしいです．2 行は左の列と同じ作物を植えるとして，残りの 4 行は左の列とすべて異なる作物を植えなければなりません．4 行分あるので，書き出すには少し勇気が必要ですが，書き出してみればそこまで多くはありません．余裕のある方は，最後の［補足］に書かれている【完全順列】についても参考にしてください．

次に $n=3$ のときについてです．畑の数を 10 個にするために，2 列つけ加えることで，畑の数を合計 $+4$ しますので，$+5$ 以上の変化について考える必要はありません．また，$+1$ の変化がないことに，理由も含めて (1) で気づいていれば，$m=6$ になっても $+1$ の変化はありませんから「$+1$ と $+3$ が 1 回ずつ」で $+4$ になるルートも考える必要はありません．そこで，$+0$ になるときのみ追加で考えて，$+0$，$+2$，$+4$ を重複を許して 2 回用いて，合計で $+4$ となるルートをすべて考えています．

最後に確率 r が求まった後，8 つの不等式のうちどれを満たすのか，おおよその大きさを評価しなくてはいけません．ぱっと見，$\dfrac{10}{10000}=\dfrac{1}{1000}$ が近そうには見えますが

$$11>10$$
$$11520>10000$$

であるため，$\dfrac{11}{11520}$ と $\dfrac{10}{10000}$ を比べようとしても，分母も分子も小さくなってしまうので，大小がハッキリしません．こういうときは

分数で困ったら小数，小数で困ったら分数

という発想を使いましょう．$\dfrac{1}{1000}$ に近いことまで気づけていれば

$$r=\frac{11}{11520}=0.0009\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2000}=0.0005$$
$$\frac{1}{1000}=0.0010$$
$$\frac{1}{500}=0.0020$$

と小数に直して比べることで，(e) に含まれることがわかりやすくなります．

［補足］

(3) の ④ を導くために，k 列目と $k+1$ 列目に植える作物が 4 行分すべてで異なる植え方を 9 通りと数える際に，すべて書き出しました．

ここについては，以下の知識があれば，別の捉え方をすることもできます．

【完全順列（かく乱順列）】

n 個の自然数 1，2，3，……，n を要素とする順列において，i 番目が i でない順列を「完全順列（かく乱順列）」という．n 個の要素からなる完全順列の総数を b_n とすると

$$b_1=0,\ b_2=1$$
$$b_{n+2}=(n+1)(b_{n+1}+b_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ．

この事実を知っている場合，9 通りを出すだけなら，以下のように b_4 を求めれば解決できます．

$$b_3=2(1+0)=2$$
$$b_4=3(2+1)=9$$

元々の上智大の問題はマーク式でしたから，完全順列の知識を用いれば，書き出さずに解く事もできたでしょう．

さらには，この完全順列の考え方は，2022 年 1 月実施の共通テスト，数学 IA の「場合の数・確率」の問題でも出題されました．完全順列を知らない学生でも解けるよう誘導がついてはいましたが，事前に知っていれば問題内容の把握が素早くできたり，

途中の計算をショートカットできたりして，かなりのメリットがあったと思われます．

新高3生の皆さんは，この2月に行われる（もしくはすでに行われた），研伸館「新学年準備イベント2022」内の「高3京大阪大への数学」の授業内で詳しく扱いますので，気になった方は，是非，参加，VOD視聴，講義ノートの見直しをお願いします．

他にも，研伸館中学生課程のテキスト内にも「プレゼント交換」の問題として登場するなど，研伸館の授業の中で時折触れられるテーマですので，新高3生以外の皆様は授業内で出会えることを楽しみにしておいてください．

待ちきれない方のために，漸化式の導き方で代表的なものを，以下に載せておきます．何か質問がある場合は，お近くの数学科講師まで申し出てくださいね．

［漸化式の導き方］

1から $n+2$ の整数が完全順列をなしているとき，i 番目の整数を t_i とする．このとき

$$t_i \neq i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n+2)$$

である．

$$t_{n+2}=j \quad (j \neq n+2) \quad \cdots\cdots⑥$$

として，以下のように場合分けを行う．

(i)　$t_j=n+2$ のとき

最初の順列から

$$t_{n+2}=j,\ t_j=n+2$$

を除けば，残りの

$$t_1,\ t_2,\ \cdots\cdots,\ t_{j-1},\ t_{j+1},\ \cdots\cdots,\ t_{n+1}$$

が

$$1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots\cdots,\ n+1$$

を要素にもつ n 個の完全順列となる．

(ii)　$t_j=k \quad (k \neq n+2)$ のとき

$$u_{n+2}=k$$

$$u_i=t_i$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots\cdots,\ n+1)$$

として新しく順列を作り直せば，$k \neq n+2$ より

$$u_i \neq i$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots\cdots,\ n+2)$$

であるから

$$u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_{j-1},\ u_{j+1},\ \cdots\cdots,\ u_{n+2}$$

が

$$1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots\cdots,\ n+2$$

を要素にもつ，$n+1$ 個の完全順列となる．

以上，(i)，(ii) と，⑥の j の選び方が $n+1$ 通りあることから

$$b_{n+2}=(n+1)(b_{n+1}+b_n) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が導かれる．

（数学科　中西）