強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 III）

r を実数とする．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を考える．

$$a_1=r,\ a_{n+1}=\frac{[a_n]}{4}+\frac{a_n}{4}+\frac{5}{6}$$
$$b_1=r,\ b_{n+1}=\frac{b_n}{2}+\frac{7}{12}$$
$$c_1=r,\ c_{n+1}=\frac{c_n}{2}+\frac{5}{6}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$$

ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数とする．以下の問に答えよ．

(1)　$b_n \leqq a_n \leqq c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

＜解答＞

(1)　　$b_n \leqq a_n \leqq c_n$　$\cdots\cdots$ ①

がすべての自然数 n で成り立つことを数学的帰納法で示す．

(I)　$n=1$ のとき

$$a_1=b_1=c_1=r$$

であるから，① は成立する．

(II)　$n=k\ (k\geqq 1)$ のとき

$$b_k \leqq a_k \leqq c_k$$

が成り立つと仮定する．すると

$$\begin{aligned}&a_{k+1}-b_{k+1}\\&=\frac{[a_k]}{4}+\frac{a_k}{4}+\frac{5}{6}-\left(\frac{b_k}{2}+\frac{7}{12}\right)\\&=\frac{a_k+[a_k]+1-2b_k}{4}\\&>\frac{2(a_k-b_k)}{4}\quad (\because\ [a_k]+1>a_k)\\&\geqq 0\quad (\because\ a_k \geqq b_k)\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}&c_{k+1}-a_{k+1}\\&=\left(\frac{c_k}{2}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{[a_k]}{4}+\frac{a_k}{4}+\frac{5}{6}\right)\\&=\frac{2c_k-(a_k+[a_k])}{4}\\&\geqq\frac{2(c_k-a_k)}{4}\quad (\because\ a_k\geqq[a_k])\\&\geqq 0\quad (\because\ c_k\geqq a_k)\end{aligned}$$

であるから

$$b_{k+1}\leqq a_{k+1}\leqq c_{k+1}$$

となり，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ．

以上 (I)，(II) より，すべての自然数 n で ① が成り立つことが示された．

(2)　まず

$$\lim_{n\to\infty} b_n,\ \lim_{n\to\infty} c_n$$

を求める．

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{2}+\frac{7}{12}$$
$$b_{n+1}-\frac{7}{6}=\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{7}{6}\right)$$

であるから，数列 $\left\{b_n-\dfrac{7}{6}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．よって

$$b_n-\frac{7}{6}=\left(b_1-\frac{7}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ b_n=\frac{7}{6}+\left(r-\frac{7}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{7}{6}$$

である．

$$c_{n+1}=\frac{c_n}{2}+\frac{5}{6}$$
$$c_{n+1}-\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\left(c_n-\frac{5}{3}\right)$$

であるから，数列 $\left\{c_n-\dfrac{5}{3}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．よって

$$c_n-\frac{5}{3}=\left(c_1-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ c_n=\frac{5}{3}+\left(r-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{5}{3}$$

である．

これらの極限値と (1) より，$n \geqq N$ のとき

$$1<b_n\leqq a_n\leqq c_n<2$$

となるような自然数の定数 N が存在する．

……②

以下，$n \geqq N$ とする．

$$[a_n]=1$$

であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{[a_n]}{4}+\frac{a_n}{4}+\frac{5}{6}\\&=\frac{a_n}{4}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\\&=\frac{a_n}{4}+\frac{13}{12}\end{aligned}$$

である．これを変形して

$$a_{n+1}-\frac{13}{9}=\frac{1}{4}\left(a_n-\frac{13}{9}\right)$$

であり，繰り返し用いて

$$a_n-\frac{13}{9}=\left(a_N-\frac{13}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{13}{9}+\left(a_N-\frac{13}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N}$$

である．よって

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{13}{9}$$

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川崎です．今年度もこのページをよろしくお願いします．

1回目の今回は数列の極限の問題を出題しました．(1) を単に使うだけでは (2) は求まりません．もう一段深い思考ができますか？という出題でした．

以下，設問毎に補足を述べます．

(1)　不等式の証明です．漸化式が解けるなら，解いてしまって a_n，b_n，c_n の大小を比べれば良いのですが，a_n についての漸化式にガウス記号があり，これを解くのが困難です．問題の流れ的にも，(2) で「a_n の極限を求めよ」とありますので，いきなり一般項は求まらないと判断すべきでしょう．というわけで

「漸化式　解けないときは　帰納法」

です．このページでも何度か書いていますが，漸化式が解けない，もしくは解いても役に立たない場合，漸化式を活用させる方法として数学的帰納法があります．

漸化式 …… n 番目を用いて $n+1$ 番目を表す

帰納法 …… k 番目を仮定して $k+1$ 番目を示す

なので，流れが同じであることが分かると思います．というわけで，解答は数学的帰納法で示しました．$n=1$ のときの成立は明らかです．あとは二項間漸化式が与えられているので，$n=k$ のときを仮定して $n=k+1$ のときを示すことになります．セオリー通り，$a_{k+1}-b_{k+1}$，$c_{k+1}-a_{k+1}$ を計算し，0 以上になることを示しましょう．その際必要になるのが

$$[a_k]\leqq a_k<[a_k]+1\quad\cdots\cdots(*)$$

というガウス記号の定義から導かれる不等式です．$[a_k]$ は a_k を超えない最大の整数なのでこの不等式が成り立ちます．「最大の」の部分から $[a_k]+1$ は a_k を超えてしまうことに注意しましょう (イメージしにくい人は $a_k=3.4$ なら…などと具体例を考えてみると分かると思います)．不等式 (*) を用いて $[a_k]$ の部分を評価することで，$n=k$ のときの仮定が使え，$n=k+1$ での成立が言えます．

(2)　(1) から「はさみうちの原理」の利用を考えるところです．$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の漸化式はいずれも特性方程式型ですので，一般項を求めることは難しく

ありません.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{7}{6},\ \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{3}$$

は求められると思います(原題には(1)にこれらの極限を求めよ，という小問がついていました).

2つの極限値を見ると，はさみうちの原理で楽勝という夢が打ち砕かれますね(はさみうちの原理を使うには，2つの極限値が一致していなければいけません). ここからが思考が必要とされる部分になります. (1)の意味は何なんだと考えることになります.

上の極限値をよく眺めましょう.

$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{7}{6}$ というのは. n を大きくしていくと，b_n の値は $\frac{7}{6}$ にいくらでも近づく, ということです. ということは，十分大きな n をとると

$$b_n > 1$$

となります. 同様に，$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{3}$ であることから十分大きな n をとると

$$c_n < 2$$

となります.

これと(1)を合わせると

$$1 < b_n \leqq a_n \leqq c_n < 2$$

となり, $[a_n]=1$ (ただし，n は十分大)が決まる, という寸法です. 解答では n が十分大，のところを

「ある自然数 N があって，$n \geqq N$ のとき」

と表現しました.

$[a_n]=1$ が決まってしまえば，漸化式は

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + \frac{13}{12}$$

となるので，ここから一般項 a_n を求めることができます. ただし，この漸化式が成り立つのは $n \geqq N$ のときであることには注意しましょう.

$$a_n = \frac{13}{9} + \left(a_N - \frac{13}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-N}$$

が正しく，これを

$$a_n = \frac{13}{9} + \left(a_1 - \frac{13}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

と a_1 を用いて表すことはできません.

以下は余裕のある人向けです.

②についてのあやふやさが気持ち悪い人は，極限の定義をしっかり学んでおくと良いでしょう. 大学数学の最初で学ぶ内容です.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを以下のように定義します.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N が存在して $n \geqq N$ のとき

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ(N は ε に依って変わって良い).

これを用いると，先ほどの $\{b_n\}$ に対して $\varepsilon = \frac{1}{6}$ として

$$\left|b_n - \frac{7}{6}\right| < \frac{1}{6}$$

が $n \geqq N$ において成り立ちます(そうなる N がとれます). この範囲の n に対して

$$-\frac{1}{6} < b_n - \frac{7}{6} < \frac{1}{6}$$

$$1 < b_n < \frac{4}{3}$$

となり，$1 < b_n$ となることがきちんと証明できます. さすがにここまでの記述は要求していないと思いますが，大学数学の香りを感じてもらおうという粋な出題だなと思います. 実際の受験生は，どこまで当たり前として良いのか分からず困ったかもしれませんが….

最後に1問，ガウス記号が絡む極限の問題を出しておきます. 練習用に使ってください.

強者の戦略

問

実数 x に対し，$k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ と表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　実数 x と自然数 n に対し

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \leqq x < n+\left[\frac{x}{n}\right]n$$

が成り立つことを示せ．

(2)　実数 x と自然数 n に対し

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$$

が成り立つことを示せ．

(3)　整数 p に対し

$$a_1=p$$

$$a_{n+1}=\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項と極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

＜解答＞

(1)　ガウス記号の定義より

$$\left[\frac{x}{n}\right] \leqq \frac{x}{n} < \left[\frac{x}{n}\right]+1$$

が成り立つ．この両辺を n 倍して

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \leqq x < n+\left[\frac{x}{n}\right]n$$

が成り立つ．

(2)　(1) より，$\left[\frac{x}{n}\right]n$ は x 以下の整数であるから，

$[x]$ の最大性より

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \leqq [x] \leqq x$$

が成り立つ．これと (1) より

$$\left[\frac{x}{n}\right]n \leqq [x] < n+\left[\frac{x}{n}\right]n$$

$$\therefore \quad \left[\frac{x}{n}\right] \leqq \frac{[x]}{n} < 1+\left[\frac{x}{n}\right]$$

であるから

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$$

である．

(3)　n：十分大とする．

(2) の関係式から

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{a_{n-1}}{n}\right] \\ &= \left[\frac{\left[\frac{a_{n-2}}{n-1}\right]}{n}\right] \\ &= \left[\frac{\left(\frac{a_{n-2}}{n-1}\right)}{n}\right] \quad (\because \quad n-1 \text{ は自然数}) \\ &= \left[\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}\right] \end{aligned}$$

である．これを繰り返すことで

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{a_1}{n(n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot 2}\right] \\ &= \left[\frac{p}{n!}\right] \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{aligned}$$

であり

$$\frac{p}{n!}-1 < a_n \leqq \frac{p}{n!}$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p}{n!}-1\right)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{p}{n!}=0$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

である．

＜解答終＞

ガウス記号の扱いは数列の極限の重要テーマの一つです．しっかり自分のものにしてください．

では今回はここまでにしておきます．

（数学科　川﨑）