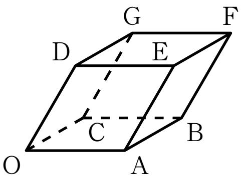
それでは解答です.

問題（数学Ⅲ）



右図のような6つの平行四辺形で囲まれた平行六面体OABC−DEFGにおいて，すべての辺の長さは1であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のどの2つのなす角も $\dfrac{\pi}{3}$ であるとする.

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$，$\cos\angle\mathrm{AOF}$ の値をそれぞれ求めよ.

(2)　三角形ACDを底面とする三角錐OACDを直線OFのまわりに1回転してできる円錐の体積を求めよ.

(3)　対角線OF上に点Pをとり，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t$ とおく．点Pを通り，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ に垂直な平面を α とする．平行六面体OABC − DEFGを平面 α で切ったときの断面が六角形となるような t の値の範囲を求めよ．また，このとき，平面 α と辺AEの交点をQとして，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ を t の式で表せ．さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ を t の式で表せ.

(4)　平行六面体OABC − DEFGを，直線OFのまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ.

《解答》

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のどの2つのなす角も $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}$$

である．よって

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2\\&\qquad+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=1+1+1+2\cdot3\cdot\frac{1}{2}\\&=6\end{aligned}$$

である．$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\geqq 0$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=\boldsymbol{\sqrt{6}}$$

である.

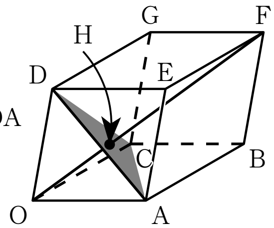
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOF}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|}\\&=\frac{2}{1\cdot\sqrt{6}}\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}\end{aligned}$$

である.

(2)　平行六面体の各面は合同より



$$\mathrm{AC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}$$

であるから，△ACDは正三角形である.

点Oから平面ACDに下ろした垂線の足をHとする.

$$\triangle\mathrm{OAH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}\equiv\triangle\mathrm{ODH}$$

より

$$\mathrm{AH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$$

であるから，点Hは△ACDの外心であり，重心でもある．さらに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

より，点Hは直線OF上の点であるから，平面ACDと直線OFの交点がHである．OH ⊥ 平面ACDより，直線OFと△ACDは直交するから，三角錐OACDを直線OFのまわりに1回転してできる立体は，HAを半径とする円を底面とし，OHを高さとする円錐である.

$\angle \mathrm{OHA}=90^\circ$ より

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{AOF}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

であり，$\triangle\mathrm{OAH}$ において三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AH}&=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OH}^2}\\&=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

である．

以上より，求める円錐の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{27}\pi}$$

である．

(3) (2) より，$t=\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，平行六面体 OABC − DEFG を平面 α で切ったときの断面は $\triangle\mathrm{ACD}$ である．よって，$0\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき断面は三角形である．

同様に考えて

$$\sqrt{6}-t\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\qquad\therefore\quad\frac{2\sqrt{6}}{3}\leqq t\leqq\sqrt{6}$$

のときも，断面は三角形である．

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<t<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ のとき，平面 α は辺 GD，ED，EA，BA，BC，GC と共有点をもつ．

よって，断面が六角形となるような t の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}<t<\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

である．

点 Q は線分 AE 上の点であるから，実数 $k\ (0<k<1)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表すことができる．さらに，点 Q は平面 α 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OD}})-\frac{t}{\sqrt{6}}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\&=\left(1-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{t}{\sqrt{6}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\left(k-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\end{aligned}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{t}{\sqrt{6}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\left(k-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right\}=0$$

$$\left(1-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)-\frac{t}{\sqrt{6}}+\left(k-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)+2\cdot\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)-\frac{t}{\sqrt{6}}+\left(k-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\right\}=0$$

$$\left(1-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)-\frac{t}{\sqrt{6}}+\left(k-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)=0$$

$$k=\frac{\sqrt{6}}{2}t-1$$

である．よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=k=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}t-1}$$

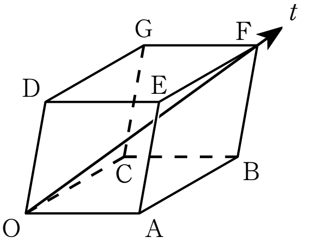
$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}<t<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\text{ より }0<k<1\text{ を満たす}\right)$

である．また

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\quad(\because\ \angle\mathrm{OPQ}=90^\circ)\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2-t^2\\&=1+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t-1\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t-1\right)^2-t^2\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{6}}{2}t+1}\end{aligned}$$

である．

(4)



図のように O を原点とする t 軸をとる．

平行六面体 OABC − DEFG を，直線 OF のまわりに 1 回転してできる立体を

$$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \frac{2\sqrt{6}}{3},$$
$$\frac{2\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \sqrt{6}$$

の 3 つの部分に分けて体積を求める．

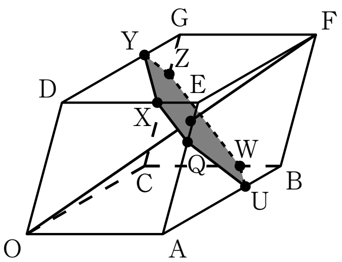
$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{2\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \sqrt{6}$ におけるそれぞれの部分の体積は，(2) で求めた円錐の体積と等しく

$$\frac{\sqrt{6}}{27}\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．

次に $\frac{\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ の部分の体積を求める．

$\frac{\sqrt{6}}{3} < t < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ のとき次図のように，平面 α と平行六面体の辺との交点を (3) で定めた Q に加え，X，Y，Z，W，U とする．



(3) と同様に考えて

$$|\overrightarrow{PX}|^2 = |\overrightarrow{PY}|^2 = |\overrightarrow{PZ}|^2 = |\overrightarrow{PW}|^2 = |\overrightarrow{PU}|^2$$
$$= \frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}t + 1$$

である．よって，題意の回転体の $\frac{\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ の部分を平面 α で切った断面は

$$\text{中心 P，半径 } |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}t + 1}$$

の円である．よって，断面積は

$$\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}t + 1}\right)^2$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}t + 1\right)$$

である $\left(t = \frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ のときも成り立つ}\right)$.

したがって，$\frac{\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ における回転体の体積は

$$\int_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \pi\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}t + 1\right)dt$$
$$= \pi\left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{\sqrt{6}}{4}t^2 + t\right]_{\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$
$$= \frac{5\sqrt{6}}{54}\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である．

①，② より，求める体積は

$$\frac{\sqrt{6}}{27}\pi \cdot 2 + \frac{5\sqrt{6}}{54}\pi = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{6}\pi}$$

である．

《解答終》

《解説》

立方体を回転させる問題は有名ですが，今回は平行六面体を回転させる問題です．小問の誘導にのっていけるか，計算量が多めなので最後まで計算しきれるかを問われています．

(1) は，空間ベクトルの基本

始点を揃え，1 次独立な 3 本のベクトルで 他のベクトルを表す

を用います．今回は，大きさもなす角も与えられている $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ で表して計算です．

(2) では，対称性（平行六面体を直線 OF を軸に 120° 回転させると，元の図形と一致する）から，円

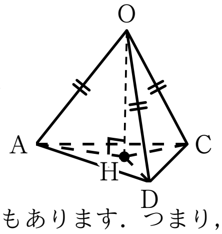
錐の中心が $\triangle$ACD の重心であるだろうと分かりますが，《解答》ではより詳しく説明しています．

四面体 OACD について

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$$

のとき，H は $\triangle$ACD の**外心**であり，さらに

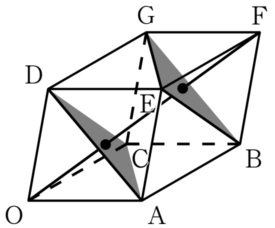
$$\mathrm{AC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}$$



のとき，H は $\triangle$ACD の**重心**でもあります．つまり，6 辺がすべて等しい正四面体では，H は底面の重心となるのですが，正四面体以外の四面体ではつねに重心とは限らないので注意しましょう．

直線 OF が $\triangle$ACD の外接円と垂直に交わり，かつその中心を通っていることから，回転してできる立体が円錐であることが確認できます．

あとは円錐の体積を求めるために半径と高さを求めます．H が $\triangle$ACD の外心であることから，正弦定理を用いて半径を求め，高さは三平方の定理で求めることもできます．今回は (1) で $\cos\angle\mathrm{AOF}$ を求めていることから，高さから求めています．



(3) で，断面が六角形となる t の値の範囲は (2) から分かります．

$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，平面 α が 3 点 A，C，D を通ることと，図形の対称性から $t=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ のとき，平面 α が 3 点 B，G，E を通ることから，断面が六角形となるのは

$$\frac{\sqrt{6}}{3}<t<\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

のときだと分かります．

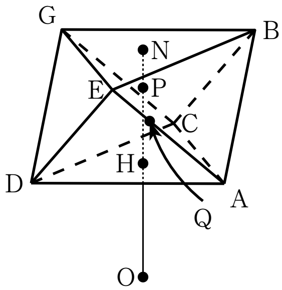
後半の $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を t の式で表す問は

2 つの図形 □ と △ の交点は □ 上かつ △ 上の点

を用います．2 直線の交点の位置ベクトルを求めるときなどでよく使う考え方です．

今回は点 Q が平面と辺の交点なので，実数 k を用いて直線のベクトル方程式で立式し，平面上であるための垂直関係から k を t で表しています．点 Q は「直線上」ではなく「辺上」の点なので，媒介変数 k が $0<k<1$ を満たすことも確認しておきましょう．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$ は比に注目しても t で表すことができます．



平面 BGE と直線 OF の交点を N とすると

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{AE}=\mathrm{HP}:\mathrm{HN}$$

である．

$$\mathrm{HP}=\mathrm{OP}-\mathrm{OH}=t-\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$\mathrm{HN}=\mathrm{ON}-\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

より

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QE}=\left(t-\frac{\sqrt{6}}{3}\right):\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|&=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AE}}\cdot\mathrm{AE}\\&=\frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{HN}}\cdot\mathrm{AE}\\&=\frac{t-\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}\cdot 1\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}t-1}\end{aligned}$$

である．

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t で表すことができれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ は三平方の定理を用いるだけです．

強者の戦略

(4) は今までの集大成です．3 つの部分に分け，積分を利用して体積を求めましょう．

回転体の体積を求める際のポイントは

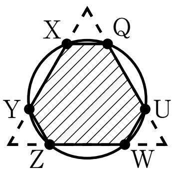
回転軸に垂直に切る 切ってから回す

です．(3) で求めた $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ が断面の円の半径の 2 乗となっているので，計算ミスに気をつけて計算しましょう．

最後に，答えを求めるのに必要ありませんが，登場した図形の補足をしておきます．

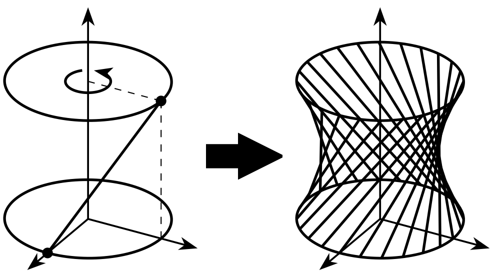
断面に表れる六角形は

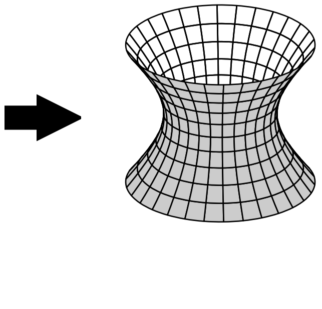
$$\mathrm{XQ} = \mathrm{YZ} = \mathrm{WU}$$
$$\mathrm{XY} = \mathrm{ZW} = \mathrm{UQ}$$



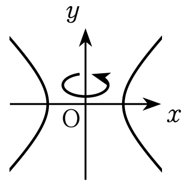
を満たす，内角がすべて等しい等角六角形となっています．

$\dfrac{\sqrt{6}}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ の部分の側面は回転一様双曲面と呼ばれる曲面となっています．回転軸とはねじれの位置の関係にある線分が回転してできる曲面は次図のようになります．





双曲線を回転させてできるのがこの回転一様双曲面です．神戸ポートタワーなどがこの形をしています．円柱や円錐台ではありませんので注意してください．立体の様子を完全に把握できなくても体積が求まるのが積分の良さではありますが，この曲面はしばしば登場する図形ではあるので，知っておくと良いでしょう．



空間図形が苦手な方は今のうちから多くの問題に触れ，頭の中で図形をイメージし，紙に描いてみるなど図形を触れ合う機会を多くもってみてください．

（数学科　松浦）