強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第 1 問（数 IAIIB）

3 つの正の整数 a，b，c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2) $a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

＜解答＞

(1) 背理法で示す．

$$A=a+b+c,\ B=ab+bc+ca,\ C=abc$$

として，A，B，C の最大公約数が 1 ではないとすると，A，B，C をともに割り切る素数 p が存在する．すると，C は p の倍数であるから，a，b，c のいずれかは p の倍数である．対称性から a が p の倍数としてよい．このとき

$$bc=B-a(b+c)$$

も p の倍数であるから，b または c も p の倍数である．同様に対称性から b が p の倍数としてよい．ところが，これでは

$$c=A-(a+b)$$

も p の倍数となるので，a，b，c の最大公約数が 1 であることに矛盾する．

以上より，A，B，C の最大公約数は 1 である．

□

(2) $$S=a^2+b^2+c^2,\ T=a^3+b^3+c^3$$

とおく．

$$S=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=A^2-2B$$
$$T=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$+3abc$$
$$=A(S-B)+3C$$

である．よって

$$2B=A^2-S \quad \cdots\cdots ①$$
$$3C=T-A(S-B) \quad \cdots\cdots ②$$

である．

A，S，T の最大公約数を d とおく．d は A，S，T を割り切るので，①，② より

A，$2B$，$3C$ は d の倍数 $\cdots\cdots (*)$

である．

$d \geqq 2$ のときを考える．d を割り切る素数 p をとる．$p \geqq 5$ とすると，$(*)$ より A，B，C は p で割り切れることになるが，これは (1) に矛盾する．よって，$p=2$ または 3 である．

$p=2$ となるのは

A，C が 2 で割り切れ，B が 2 で割り切れないときである，よって，このとき d は 2 で割り切れるが 2^2 では割り切れない．

$p=3$ となるのは

A，B が 3 で割り切れ，C が 3 で割り切れないときである，よって，このとき d は 3 で割り切れるが 3^2 では割り切れない．

以上より，d としてありえる数は

1，2，3，6 $(=2\cdot 3)$

のいずれかに限られる．

さらに

・$a=1$，$b=1$，$c=3$ のとき

$A=5$，$S=11$，$T=29$ より $d=1$

・$a=1$，$b=1$，$c=2$ のとき

$A=4$，$S=6$，$T=10$ より $d=2$

・$a=1$，$b=1$，$c=1$ のとき

$A=S=T=3$ より $d=3$

・$a=1$，$b=1$，$c=4$ のとき

$A=6$，$S=18$，$T=66$ より $d=6$

となり，$d=1$，2，3，6 となる正の整数 a，b，c が存在する．

以上より，求める正の整数は

1，2，3，6

である．

＜解答終＞

＜コメント＞

数学科の川崎です．今回は東京工業大学で 2022 年度に出題された問題を取り上げました．設定はシンプルですが，取っ掛かりが気付きにくかったかもしれません．整数の核である素数が活躍します．

以下，設問別に補足を述べます．

(1)　a，b，c の最大公約数が 1 のとき

$$A=a+b+c,\ B=ab+bc+ca,\ C=abc$$

の 3 数の最大公約数が 1 であることを示します．「1 以外の正の公約数をもたない」という否定の命題を示すので，背理法で示します．最大公約数が 1 でないと仮定して矛盾を導いていきます．すると，A，B，C をともに割り切る素数 p が取れて，C (積の形) に着目すると，a，b，c のいずれかは p の倍数となります．このとき，**素数** p で議論することが大事です．例えば C が 6 (素数でない) で割れたからといって，a，b，c のいずれかが 6 の倍数とは言えない ($a=2$，$b=3$ などの場合がある) ことに注意しましょう．

対称性から a が p の倍数として構いません．すると，B の項のうち ab，ca は p の倍数となりますので bc も p の倍数で，b，c のいずれかも p の倍数です．同じく対称性から b が p の倍数として構いません．ここで，注意なのですが

「a，b がともに p で割り切れるから矛盾」

とするのは誤りです．仮定は a，b，c の最大公約数が 1 ですが，これを

「a と b，b と c，c と a はいずれも互いに素」

と読み違える人がいるので注意しましょう．a と b がともに p の倍数でも，a，b，c の最大公約数は 1 になれます (例えば $a=b=p$，$c=1$ など)．整数問題はイメージがしやすいので，本問のような抽象度が高い問題は**具体例を考えながら，自分の議論が正しいかを確認して解き進める**のが良いでしょう．

さて，話を戻しますが，a と b がともに p の倍数とすると，A に着目することで c も p の倍数となります．これでめでたく矛盾が導けるわけです．

A，B，C は 3 次の基本対称式ですので，解と係数の関係の利用を考えた人もいるかもしれません．その方針でいく別解を紹介します．

＜(1) の別解＞

背理法で示す．

$$A=a+b+c,\ B=ab+bc+ca,\ C=abc$$

として，A，B，C の最大公約数が 1 ではないとすると，A，B，C をともに割り切る素数 p が存在する．

ここで，a，b，c は 3 次方程式

$$t^3-At^2+Bt-C=0$$

の 3 解であるから

$$a^3-Aa^2+Ba-C=0 \quad \cdots\cdots ③$$

$$b^3-Ab^2+Bb-C=0 \quad \cdots\cdots ④$$

$$c^3-Ac^3+Bc-C=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．これら 3 式から，a^3，b^3，c^3 はいずれも p の倍数であり，p は素数であるから，a，b，c も p の倍数である．ところが，これは a，b，c の最大公約数が 1 であることに矛盾する．

以上より，A，B，C の最大公約数は 1 である．

□

解と係数の関係に持ちこむことで，対称性を崩さずに議論できるメリットがあります．

(2)　$S=a^2+b^2+c^2$，$T=a^3+b^3+c^3$

として，A，S，T の最大公約数を考えます．まずは a，b，c に適当な値を入れて**実験**してみましょう．この実験が答案の最後に活きてきます．数字が大きいと大変ですので，a，b，c の最大公約数が 1 であることに注意しつつ，$a=b=1$ とか，$a=1$，$b=2$ ぐらいにして c を動かしてみましょう．1，2，3，6 が出てくるな，他にはなさそうだなと予想できたらしめたものです．素数 2，3 に着目するんだろうなと解答の方針を立てることができます．

というわけで，解答を作っていきますが，まず

最大公約数として1，2，3，6以外はありえないということを示します．(1)がヒントで，基本対称式A，B，Cが登場しましたので,解答中の①，②のような式変形をしたいところです．この結果，求める最大公約数dはA，$2B$，$3C$を割り切ることが分かります．

ちなみに，(1)を解と係数の関係で示した人は，別解中の③，④，⑤を加えることで

$$T-AS+BA-3C=0$$

となるので．ここから$3C$がdで割り切れることを導くこともできます．

さて，あとはdを絞っていきましょう．(1)と同様にdを割り切る素数pを考えます．$p \fallingdotseq 2$，3のときは,pがA，B，Cを割り切ることになり(1)に反します．$p=2$とすると，A，$2B$，$3C$がすべて2で割り切れることになります．すると，A，Cは2で割り切れ，Bは2で割り切れません(Bが2で割り切れてしまうと(1)に反する)．このBが2で割り切れないというのがポイントで，dは2で割り切れたとしても1回までしか割れないということが分かります．$p=3$のときも同様です．というわけでdを割り切る素数はあっても2，3のみで，その素因数分解の指数は1になることが分かります．すなわち$d=1$，2，3，6に絞られました．

ここで終わってはダメで，最後に実際にA，S，Tの最大公約数が1，2，3，6になるa，b，cが存在することを示します．このためには，a，b，cの例をあげれば良く，最初に実験していればすんなりとあげられるはずです．**手を動かして具体的に考える**ことがここでも大事になります．

ちなみに，(2)でdを割り切る素数が2，3しかないことを示した後，2，3でdが1回までしか割れないことを示すには，次のように余りで分類する方法もあります．

・2で割り切れる回数について

A，S，Tが2で割り切れるとする．a，b，cの最大公約数は1であり，$A=a+b+c$が偶数であることから，a，b，cのうち2数は奇数，残りの1つは偶数である．mod 4で見て

$n\ (\mathrm{mod}\,4)$	0	1	2	3
$n^2\ (\mathrm{mod}\,4)$	0	1	0	1

であるから

$$S\equiv 1+1+0\equiv 2$$

であり，Sは4では割り切れない．よって，dが2で割り切れるとき，$2^2\,(=4)$では割り切れない．

・3で割り切れる回数について

A，S，Tが3で割り切れるとする，a，b，cの最大公約数は1であり，$A=a+b+c$が3で割り切れることから，a，b，cを3で割った余りは

(0，1，2)の並べ替え

(1，1，1)，(2，2，2)

のいずれかである．mod 3で見て

$n\ (\mathrm{mod}\,3)$	0	1	2
$n^2\ (\mathrm{mod}\,3)$	0	1	1

であるから，$S=a^2+b^2+c^2$が3で割り切れるのは，a，b，cを3で割った余りがすべて1またはすべて2のときである．

ここで，自然数kに対して

$$(3k)^3=9\cdot 3k^3$$
$$(3k-2)^3=9(3k^3-6k^2+4k)-8$$
$$(3k-1)^3=9(3k^3-3k^2+k)-1$$

であるから

$n\ (\mathrm{mod}\,3)$	0	1	2
$n^3\ (\mathrm{mod}\,9)$	0	1	8

となる．よって，a，b，cを3で割った余りがすべて1またはすべて2のとき

$$T=a^3+b^3+c^3$$

を9で割った余りは

$$1+1+1\equiv 3,\quad 8+8+8\equiv 6$$

となり，いずれも 0 ではない．

以上より，d が 3 で割り切れるとき，$3^2\,(=9)$ では割り切れない．

「余りで分類」も整数問題では主要なテクニックです．特に 3 や 4 で割った余りの扱いには十分に慣れておきましょう．

最後に 1 問練習問題です．今年度京都大学で出題された問題を出しておきます．最大公約数つながりで解いてみてください．

問

n を自然数とする．3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ．

<解答>

$$n^4+2=(n^2+2)(n^2-2)+6$$

である．A_n は n^4+2，n^2+2 を割り切るので，6 を割り切り，1，2，3，6 のいずれかとなる．

n を 6 で割った余りで分類すると，下表のようになる．

$n\,(\mathrm{mod}\,6)$	0	1	2	3	4	5
$n^2+2\,(\mathrm{mod}\,6)$	2	3	0	5	0	3
$n^4+2\,(\mathrm{mod}\,6)$	2	3	0	5	0	3
$n^6+2\,(\mathrm{mod}\,6)$	2	3	0	5	0	3

よって

$n\,(\mathrm{mod}\,6)$	0	1	2	3	4	5
A_n	2	3	6	1	6	3

となる．

<解答終>

いかがだったでしょうか？まず実験をするところですが

$n=1$ のとき，3 数は 3，3，3 で $A_1=3$

$n=2$ のとき，3 数は 6，18，66 で $A_2=6$

$n=3$ のとき，3 数は 11，83，731 で $A_3=1$

$n=4$ のとき，3 数は 18，258，4098 で $A_4=6$

ぐらいで，数字が大きく困ってしまいます．何か打開策を考えなくてはいけません．

ここで

最大公約数　→　「互除法」

と思いつけば先に進めます．n^4+2 を n^2+2 で割ることで，A_n が 6 の約数になることが言えます．

また

$$n^2+2=A_n\cdot\alpha$$
$$n^4+2=A_n\cdot\beta$$
$$n^6+2=A_n\cdot\gamma$$

(α，β，γ は自然数で最大公約数は 1)

として，$n^6=n^2\cdot n^4$ から

$$A_n\cdot\gamma-2=(A_n\cdot\alpha-2)(A_n\cdot\beta-2)$$
$$A_n(\gamma+2\alpha+2\beta-\alpha\beta A_n)=6$$

とすることで，A_n が 6 の約数を示すこともできます．あとは 3 数を 6 で割った余りを調べることで，最大公約数が分かるという流れです．この問題は最大公約数としてとりうる値を答えるだけではなく，n ごとにその値が何になるかも答えないといけないことに注意しましょう．

解答中の表の中で，n を 6 で割った余りが 4 や 5 のときは計算が大変に感じるかもしれませんが

$$4\equiv-2,\ 5\equiv-1\ \ (\mathrm{mod}\,6)$$

とすれば楽に計算できます．

それでは今回はここまでにしたいと思います．また次回．

（数学科　川﨑）