それでは解答です．

> **問題（数学 III）**
> 関数 $f(x)=4x(1-x)$ を用いて，数列 $\{a_n\}$ を
> $$a_1=\sin^2\frac{\pi}{9}\,,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \cdots\cdots)$$
> で定める．このとき
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$
> を求めよ．

考え方

まずは実験です．$n=1$，2，3，…… と順番に代入してみましょう．

$$
\begin{aligned}
a_1&=\sin^2\frac{\pi}{9}\\
a_2&=4a_1(1-a_1)\\
&=4\sin^2\frac{\pi}{9}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{9}\right)\\
&=4\sin^2\frac{\pi}{9}\cos^2\frac{\pi}{9}\\
&=\left(2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right)^2\\
&=\sin^2\frac{2\pi}{9}\\
a_3&=4a_2(1-a_2)\\
&=4\sin^2\frac{2\pi}{9}\left(1-\sin^2\frac{2\pi}{9}\right)\\
&=4\sin^2\frac{2\pi}{9}\cos^2\frac{2\pi}{9}\\
&=\left(2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\right)^2\\
&=\sin^2\frac{4\pi}{9}\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

となります．

一般項は

$$a_n=\sin^2\frac{2^{n-1}\pi}{9}$$

となりそうです．

実際，$n=1$ のときは成り立ちます．

$n=k$ のときに成り立つと仮定すると

$$a_k=\sin^2\frac{2^{k-1}\pi}{9}$$

です．

漸化式を用いると

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&=4a_k(1-a_k)\\
&=4\sin^2\frac{2^{k-1}\pi}{9}\left(1-\sin^2\frac{2^{k-1}\pi}{9}\right)\\
&=4\sin^2\frac{2^{k-1}\pi}{9}\cos^2\frac{2^{k-1}\pi}{9}\\
&=\left(2\sin\frac{2^{k-1}\pi}{9}\cos\frac{2^{k-1}\pi}{9}\right)^2\\
&=\sin^2\frac{2^{k}\pi}{9}
\end{aligned}
$$

となるので，$n=k+1$ のときも成り立ちます．

以上から，数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n に対して，$a_n=\sin^2\dfrac{2^{n-1}\pi}{9}$ であることが示されました．

次に，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$ について考えてみましょう．この和を書き換えると

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{2^{k-1}\pi}{9}$$

です．半角の公式を用いて次数を下げると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2^k\pi}{9}\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2^k\pi}{9}
\end{aligned}
$$

となります．この

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2^k\pi}{9}$$

はどう計算したらいいでしょうか．

*　　　*　　　*

これが

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

のような，「角が等差タイプ」の和なら，話は簡単 (?) です．θ が 2π の整数倍でないとき，元の和に $\sin\dfrac{\theta}{2}$ をかけた

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

を計算し，最後に $\sin\dfrac{\theta}{2}$ $(\neq 0)$ で割ることで求めることができます．

まず，「積・和の公式」

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\sin k\theta \sin\frac{\theta}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\left\{\cos\left(k\theta + \frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(k\theta - \frac{\theta}{2}\right)\right\}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2k+1}{2}\theta - \cos\frac{2k-1}{2}\theta\right)
\end{aligned}$$

と変形できます．$k = 1$，2，3，……，n として加えることで

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \sin\frac{\theta}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\frac{(2k+1)}{2}\theta - \cos\frac{(2k-1)}{2}\theta\right\}\\
&= -\frac{1}{2}\left\{\left(\cos\frac{3}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta\right)\right.\\
&\qquad\qquad + \left(\cos\frac{5}{2}\theta - \cos\frac{3}{2}\theta\right)\\
&\qquad + \cdots\cdots + \left.\left(\cos\frac{2n+1}{2}\theta - \cos\frac{2n-1}{2}\theta\right)\right\}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n+1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta\right)
\end{aligned}$$

となります．さらに「和・積の公式」

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n+1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta\right)\\
&= \sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta
\end{aligned}$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta$$

となるので，両辺を $\sin\frac{\theta}{2}$ $(\neq 0)$ で割って

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

となります．これをまとめておきます．

$\sin k\theta$ の和

θ が 2π の整数倍でないとき

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

と計算できる．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$ についても同様です．

$\cos k\theta$ の和

θ が 2π の整数倍でないとき

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

と計算できる．

*　　　*　　　*

本問の和は，「角が等比タイプ」の和です．残念ながら，「角が等差タイプ」と同じようにはいきません．図示したり，表にしたりしながら実験して，法則性を探りましょう．

$$b_n = \cos\frac{2^n\pi}{9}$$

とおきます．

$$\begin{aligned}
b_1 &= \cos\frac{2\pi}{9}\\
b_2 &= \cos\frac{4\pi}{9}\\
b_3 &= \cos\frac{8\pi}{9}\\
b_4 &= \cos\frac{16\pi}{9}
\end{aligned}$$

となりますが，$\dfrac{16\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{9}$ なので

$$\cos\frac{16\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9}$$

です．よって

$$b_4 = b_1$$

となります．以下同様に

$$b_5=b_2,\ b_6=b_3,\ b_7=b_4,\ \cdots\cdots$$

となりますから，数列 $\{b_n\}$ は周期 3 の周期数列です．

l を自然数として

$$b_n=\begin{cases}\cos\dfrac{2\pi}{9} & (n=3l-2)\\ \cos\dfrac{4\pi}{9} & (n=3l-1)\\ \cos\dfrac{8\pi}{9} & (n=3l)\end{cases}$$

と表せます．

したがって，$B=b_1+b_2+b_3$ とおくと，l を自然数として

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2^k\pi}{9}$$
$$=\begin{cases}(l-1)B+b_1 & (n=3l-2)\\ (l-1)B+b_1+b_2 & (n=3l-1)\\ lB & (n=3l)\end{cases}$$

となります．

次の目標は，B の値です．倍角公式や 4 倍角の公式を使って無理やり角度をそろえてみます．

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$\begin{aligned}\cos 4\theta&=2\cos^2 2\theta-1\\ &=2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\ &=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}B&=\cos\frac{2\pi}{9}\\ &\quad+\left(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\right)\\ &\quad+\left(8\cos^4\frac{2\pi}{9}-8\cos^2\frac{2\pi}{9}+1\right)\\ &=8\cos^4\frac{2\pi}{9}-6\cos^2\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\\ &=\cos\frac{2\pi}{9}\left\{2\left(4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}\right)+1\right\}\end{aligned}$$

となります．ここまで変形すれば，ピンと来る人もいるでしょう．3 倍角の公式の形です．

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

ですから

$$4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

となります．

よって

$$\begin{aligned}&2\left(4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}\right)+1\\ &=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\\ &=0\end{aligned}$$

となり

$$B=0$$

であることが分かります．

もう少し工夫するなら，次のようにやるのも手です．

$$\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{9}$$
$$\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{4\pi}{9}$$

より，複素数平面の単位円上で，偏角が

$$\frac{2\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9},\ -\frac{4\pi}{9}$$

であるような 3 点は正三角形をなします．正三角形の重心と外心は一致しますから，重心と外心を表す複素数の実部を比べると

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)=0$$

となります．

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)=\cos\frac{4\pi}{9}$$

ですから

$$b_1+b_3+b_2=0\qquad\therefore\quad B=0$$

です．

他の工夫もあります．$t=\dfrac{2\pi}{9},\ \dfrac{4\pi}{9},\ \dfrac{8\pi}{9}$ は

$$\cos 3t=-\frac{1}{2}\quad(0\leqq t\leqq\pi)$$

の 3 解です．分母を払って 3 倍角の公式を用い，$x=\cos t$ とすると

$$8x^3-6x+1=0\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

となります．b_1，b_2，b_3 は ① の異なる 3 解です．よって，解と係数の関係から

$$b_1+b_2+b_3=0$$

と分かります．

*　　　*　　　*

最後に，極限を求めましょう．

$B=0$ ですから

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2^k\pi}{9}=\begin{cases} b_1 & (n=3l-2) \\ b_1+b_2 & (n=3l-1) \\ 0 & (n=3l) \end{cases}$$

です．よって，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$ とおくと

$$S_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{b_1}{2n} & (n=3l-2) \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{b_1+b_2}{2n} & (n=3l-1) \\ \dfrac{1}{2} & (n=3l) \end{cases}$$

となります．

$$\lim_{l\to\infty}S_{3l-2}=\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{b_1}{2(3l-2)}\right\}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{l\to\infty}S_{3l-1}=\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{b_1+b_2}{2(3l-1)}\right\}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{l\to\infty}S_{3l}=\frac{1}{2}$$

ですから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

です．

以上をまとめて，解答にします．

解答

まず

$$a_1=\sin^2\frac{\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)$$

である．

$$\begin{aligned} a_2&=4a_1(1-a_1) \\ &=\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\cdot\left\{2-\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)\right\} \\ &=1-\cos^2\frac{2\pi}{9} \\ &=1-\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{4\pi}{9}\right) \\ &=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

である．同様に

$$a_3=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{8\pi}{9}\right)$$
$$a_4=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{16\pi}{9}\right)$$

となるが，$\dfrac{16\pi}{9}=2\pi-\dfrac{2\pi}{9}$ であるから

$$a_4=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{9}\right)=a_1$$

である．以後，これを繰り返すから，l を自然数として

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{9}\right) & (n=3l-2) \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{4\pi}{9}\right) & (n=3l-1) \\ \dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{8\pi}{9}\right) & (n=3l) \end{cases}$$

である．

$$b_1=\cos\frac{2\pi}{9}\ ,\ b_2=\cos\frac{4\pi}{9}\ ,\ b_3=\cos\frac{8\pi}{9}$$

とおく．$t=\dfrac{2\pi}{9}$, $\dfrac{4\pi}{9}$, $\dfrac{8\pi}{9}$ は

$$\cos 3t=-\frac{1}{2}\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

の 3 解であるから，分母を払って 3 倍角の公式を用い，$x=\cos t$ とすると

$$8x^3-6x+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である．b_1 , b_2 , b_3 は ① の異なる 3 解であるから，解と係数の関係より

$$b_1+b_2+b_3=0$$

である．

よって，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$ とおくと

$$S_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{b_1}{2n} & (n=3l-2) \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{b_1+b_2}{2n} & (n=3l-1) \\ \dfrac{1}{2} & (n=3l) \end{cases}$$

である．

$$\lim_{l\to\infty}S_{3l-2}=\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{b_1}{2(3l-2)}\right\}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{l\to\infty}S_{3l-1}=\lim_{l\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{b_1+b_2}{2(3l-1)}\right\}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{l\to\infty}S_{3l}=\frac{1}{2}$$

であるから，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

である．

*　　　　*　　　　*

今回の問題は，周期数列の和の極限でした．このような問題では，やはり，**実験して様子を探る**ということ，そして，**法則を見つける**ということがとても大事です．もちろん，倍角や半角，3倍角の公式，和・積や積・和の公式など，覚えて使いこなせないといけないもの，最低限見覚えがないといけないものもあります．試行と思考と暗記のバランスを上手くとって行きたいですね．

（笹谷）