強者の戦略

それでは，前回の解答です．

第１問（数Ⅲ）

正の整数 n に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$

とする．

(1)　正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2)　極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

＜解答＞

(1)

$$f(x)=\frac{x}{2}-\left(\sqrt{1+x}-1\right)$$

$$g(x)=\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2+x}$$

として，$x>0$ で $f(x)\geqq0$，$g(x)\geqq0$ を示す．

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\\&=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}\\&>0\end{aligned}$$

であるから，$f(x)$ は単調増加であり

$$f(x)>f(0)=0$$

である．

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2+x-x}{(2+x)^2}\\&=\frac{(2+x)^2-4\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}\\&=\frac{4(1+x)+x^2-4\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}\\&=\frac{4\left(\sqrt{1+x}-1\right)+x^2}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}\\&>0\end{aligned}$$

であるから，$g(x)$ も単調増加であり

$$g(x)>g(0)=0$$

である．

以上で示せた．

□

※　示す式には等号がついているが，この等号は不成立である．示す式よりも強いことが示せているのでこのままで良い．気になるようであれば，

「$f(x)>0$ より，$f(x)\geqq0$ が成り立つ」

のように最後に (成り立たない) 等号をつけても良い．

(2)　n を十分大とする．

$k=1$，2，……，n に対して

$$\frac{k}{n^2}>0$$

であるから，(1) の不等式で $x=\frac{k}{n^2}$ として

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

である．さらに，$1\leqq k\leqq n$ のとき

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\geqq\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}}=\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{k}{n(2n+1)}$$

であるから

$$\frac{k}{n(2n+1)}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

である．

$k=1$，2，……，n で各辺を足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(2n+1)}\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{1}{n(2n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\leqq S_n\leqq\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}\leqq S_n\leqq\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

である．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$$

である．

＜解答終わり＞

＜コメント＞

数学科の川﨑です．年が明けて 1 発目は，共通テスト後ということもあって，数Ⅲの標準的な問題を出題しました．本番ではしっかり取りきりたい難易度です．(1) は手が広く様々な解法があります．(2) の和の計算に少しだけ工夫がいるのですが，それに気付けたでしょうか？

以下，設問毎に補足を述べます．

(1)　不等式の証明です．＜解答＞では定石通り辺々差をとって微分にもちこみました．$f'(x)$，$g'(x)$ ともに通分すると符号が正と分かるので

「単調　→　端の確認」

の流れで示すことができます．

$g'(x)$ の方は，少し符号の確認に手間どるかもしれません．

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2+x-x}{(2+x)^2}\\&=\frac{(2+x)^2-4\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}\\&=\frac{4(1+x)+x^2-4\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}\end{aligned}\quad\Big\downarrow\ \textbf{通分}$$

として，分子の符号を考えます．ルートを含んだ式なので有理化するのが定石ですが，この問題は式を眺めて $\sqrt{1+x}$ のかたまりに気付けば符号が決まります．符号の確認には，通分や因数分解によって**「積・商の形を作る」**方針が有効です．微分を用いての不等式の証明は非常に大事ですのでミス無くできるようにしておいてください．

次に，別の方法を考えてみましょう．示す式を示しやすい形に変形する工夫を考えます．

＜ (1) の別解 1 ＞

示す式は (各辺に 1 を加えて)

$$\frac{2(x+1)}{x+2}\leqq\sqrt{x+1}\leqq\frac{x+2}{2}$$

と同値であり，この各辺は正であるから 2 乗して

$$\frac{4(x+1)^2}{(x+2)^2}\leqq x+1\leqq\frac{(x+2)^2}{4}\quad\cdots\cdots(*)$$

とも同値である．以下，$(*)$ を示す．

$$\frac{(x+2)^2}{4}-(x+1)=\frac{x^2}{4}>0$$

であるから

$$x+1<\frac{(x+2)^2}{4}$$

である．

さらに

$$\begin{aligned}x+1-\frac{4(x+1)^2}{(x+2)^2}&=\frac{(x+1)\{(x+2)^2-4(x+1)\}}{(x+2)^2}\\&=\frac{x^2(x+1)}{(x+2)^2}\\&>0\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{4(x+1)^2}{(x+2)^2}<x+1$$

である．

以上で示せた．

□

この解法だと微分は要らなくなります．2 乗することでルートを消すと計算が格段に楽になります．

もう 1 つ，次のような式変形も考えられます．2 乗とともにルートの扱いとして重要なのは**「有理化」**です．

＜(1) の別解 2＞

示す式は (中辺を**有理化**して)

$$\frac{x}{2+x} \leqq \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \leqq \frac{x}{2}$$

と同値であり，$x>0$ であるから

$$2 \leqq \sqrt{1+x}+1 \leqq 2+x \quad \cdots\cdots (**)$$

とも同値である．

以下，$(**)$ を示す．

$x>0$ より

$$\sqrt{1+x}+1>\sqrt{1}+1=2$$

である．また

$$\begin{aligned} &2+x-(1+\sqrt{1+x}) \\ =&1+x-\sqrt{1+x} \\ =&\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}-1) \\ >&0 \end{aligned}$$

であるから

$$1+\sqrt{1+x}<2+x$$

である．

以上で示せた．

□

有理化すると各辺の分子が x となり揃うので，分母を比べることになります．その結果，分数式を扱わなくてすむのがこの解法のメリットです．

もう 1 つ，今度は飛び道具を使ってみます．

＜(1) の別解 3＞

$$F(t)=\sqrt{1+t} \quad (t \geqq 0)$$

とおくと，$t>0$ において

$$F'(t)=\frac{1}{2\sqrt{1+t}} \quad (\text{微分可能})$$

である．よって，正の実数 x に対して，平均値の定理より

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(c) \quad (0<c<x)$$

すなわち

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{1+c}} \quad (0<c<x)$$

となる c が存在する．

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}<\frac{1}{2\sqrt{1+c}}<\frac{1}{2}$$

であるから

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}<\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x}{2\sqrt{1+x}}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

である．ここで

$$(2+x)^2-(2\sqrt{1+x})^2=x^2>0$$

かつ

$$2+x>0, \quad 2\sqrt{1+x}>0$$

であることから

$$2\sqrt{1+x}<2+x$$

$$\frac{x}{2+x}<\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

である．よって

$$\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

である．以上で示せた．

□

中辺が $F(x)-F(0)$ という「**関数値の差**」の形になっていることに着目した解法です．**平均値の定理**も不等式の証明問題の解法としては頭に入れておきましょう．

実は，示す式の右側の不等式が示せたら

$$(0<)\sqrt{1+x}<\frac{x+2}{2}$$

$$\frac{2}{x+2}<\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

(両辺 $(1+x)$ 倍)

$$\frac{2(1+x)}{x+2}<\sqrt{1+x}$$

$$\frac{x}{x+2}<\sqrt{1+x}-1$$

とすることで左側の不等式は得られます．最初にこれに気付くと手間が半分以下で済みます．

(1) は (易しいですが) このように色々な視点を与えてくれる良い問題でした．背景には $\sqrt{1+x}$ という関数のマクローリン展開がありますので，興味のある人は調べてみてください (ここでは (1) の話がだいぶ長くなってしまいましたので深入りしないでおきます).

(2)　和の極限を考える問題です．

$\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1$ のシグマ計算はきついですので，

(1) の利用を考えます．

「**不等式＋極限→はさみうち**」

も必ず流れをおさえましょう．

(1) で $x=\dfrac{k}{n^2}$ とするのは気付くと思います．

$\dfrac{k}{n^2}>0$ ((1) の仮定) をチェックするのを忘れないようにしてください．こういう細かいところで数点の差が生まれます．

$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ として足し合わせることではさみうちの原理にもっていく流れなのですが，そのままやると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}$$

となります．この右辺はシグマ計算できるので問題無いのですが (答えもここから予想できます)，左辺の計算が問題です．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}$$

となり，このままでは計算できません．そこで「**和が計算できる形で評価する**」ことを考えます．ここがこの問題の最難関ポイントです．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}$ の計算において，邪魔なのは分母の k なのでこれを評価します．k の下に n^2 がついていることが幸いして，$\dfrac{k}{n^2}\leqq\dfrac{n}{n^2}$ と最大値でおさえるだけで上手く和の計算・極限計算が進められる形になります．言われたら簡単なのですが，案外手が止まってしまうところです．

あとは解答のように $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$ を計算して極限を求めても良いですし

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$$
$$\to\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\quad(n\to\infty)$$

と区分求積法にもっていっても良いでしょう．その場合，左辺は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n(2n+1)}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$$

としてください．

先ほど，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}$ という和が出てきましたが，この形では区分求積法は使えません．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{2n+\frac{k}{n}}$$

となり，シグマの中の分母に $2n$ が残ってしまうからです．いつでも使えるわけではないこと，どのようなときに使えるのか (よく出てくるのは $\dfrac{1}{n}$ をくくり出した後で，n と k が同次式になる形) などを確認しておいてください．

最後に 1 問，不等式から極限という同じ流れの問題をつけておきます．積分の形で不等式を作る問題です．練習に使ってください．

強者の戦略

問

$$S_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ について

$$\frac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\frac{1}{\pi n^2}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ．

＜解答＞

(1)　$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ において

$$\frac{1-\cos x}{(n+1)^2\pi^2}\leqq\frac{1-\cos x}{x^2}\leqq\frac{1-\cos x}{n^2\pi^2}$$

$$(\because\quad 1-\cos x\geqq 0)$$

が成り立つ．

よって，各辺積分して

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{(n+1)^2\pi^2}dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$$
$$\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{n^2\pi^2}dx$$

となる．ここで

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1-\cos x)\,dx=\Big[x-\sin x\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$
$$=\pi$$

であるから

$$\frac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\frac{1}{\pi n^2}$$

が成り立つ．

(2)　(1) より，十分大きな n に対して

$$\pi k^2\leqq\frac{1}{S_k}\leqq\pi(k+1)^2\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,n)$$

が成り立つので，足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n}\pi k^2\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\leqq\sum_{k=1}^{n}\pi(k+1)^2$$
$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\leqq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\leqq\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2$$

が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\pi\int_0^1x^2\,dx$$
$$=\frac{\pi}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{l=2}^{n+1}\left(\frac{l}{n}\right)^2$$
$$=\int_0^1x^2\,dx$$
$$=\frac{\pi}{3}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\frac{\pi}{3}$$

である．

＜解答終わり＞

(1) の積分は，被積分関数のうち分母の x^2 が単調であることから示せます．最大値・最小値でおさえる感覚です．(2) は (1) を使ってはさみうちです．和は直接計算もできますし，解答のように区分求積にももっていけます．右辺の $\dfrac{k+1}{n}$ の形は $k+1=l$ と置きかえてください．

それでは今回はここまでにしたいと思います．今年度私が担当する分はこれが最後になります．受験生の方は体調に気をつけて，最後まで追い込みを頑張ってください．高 2 以下の方は引き続きこのページの問題を楽しんでもらえたらと思います．

（数学科　川﨑）