強者の戦略

今回は 2025 年度の京都大学の理系の第 1 問を解説したいと思います．最近第 1 問で増えている独立の小問集合です．いずれも基本的な内容なので，是非とも完答したいところです．

理系第１問

次の各問に答えよ．

問 1　i は虚数単位とする．複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

問 2　次の定積分の値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$

【解答】

問 1　z が絶対値が 2 である複素数であるとき

$$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくことができる．このとき

$$\begin{aligned}
&z-\frac{i}{z}\\
&=2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{i}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}\\
&=2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{i(\cos\theta-i\sin\theta)}{2}\\
&=\left(2\cos\theta-\frac{\sin\theta}{2}\right)+i\left(2\sin\theta-\frac{\cos\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\left|z-\frac{i}{z}\right|^2\\
&=\left(2\cos\theta-\frac{\sin\theta}{2}\right)^2+\left(2\sin\theta-\frac{\cos\theta}{2}\right)^2\\
&=\frac{17}{4}-4\sin\theta\cos\theta\\
&=\frac{17}{4}-2\sin 2\theta
\end{aligned}$$

である．

よって，$0\leqq 2\theta<4\pi$ より，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ は

$$\sin 2\theta=-1$$

のとき，最大値

$$\sqrt{\frac{17}{4}+2}=\frac{5}{2}$$

をとり

$$\sin 2\theta=1$$

のとき，最小値

$$\sqrt{\frac{17}{4}-2}=\frac{3}{2}$$

をとる．

問 2

(1)

$$\begin{aligned}
&\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\\
&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\\
&=\Big[\sqrt{x^2+1}+x^2-\log(x^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\
&=4-2\log 2
\end{aligned}$$

である．また

$$x=\tan\theta\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと

x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\dfrac{\pi}{3}$

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\\
&=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

である．以上より

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx\\
&=4-2\log 2+\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

である．

(2)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}} = \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}$$

である $\left(\because\ \sin\dfrac{x}{2} \geqq 0,\ \cos\dfrac{x}{2} > 0\right)$.

よって

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\,dx \\
&= \left[-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -2\log\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \log 2
\end{aligned}$$

である.

【解説】

問1　$|z| = 2$ であることから，z を極形式でおいています．極形式でおいた後は $z - \dfrac{i}{z}$ の実部と虚部を求めれば，$\left|z - \dfrac{i}{z}\right|$ を θ で表すことができることは容易に思いつくので，そのまま計算するだけです.

特に $|z| = 1$ のとき，以下の 3 つは押さえておきましょう.

> ①　$\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ となる.
>
> ②　$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおける.
>
> ③　a，b を実数として
>
> $$z = a + bi \quad (a^2 + b^2 = 1)$$
>
> とおける.

本問題も上記 ③ の実部と虚部を文字で置くやり方で解くことはできて，$a^2 + b^2 = 4$ のとき，$\dfrac{17}{4} - ab$ の最大値・最小値を求める問題に帰着されます.

また α，β を複素数として，$|\alpha - \beta|$ は複素数平面で $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ とするとき，線分 AB の長さを表します．これを利用した別解を次に書きます.

【別解】

$$\begin{aligned}
\left|z - \frac{i}{z}\right| &= \left|\frac{z^2 - i}{z}\right| \\
&= \frac{|z^2 - i|}{|z|} \\
&= \frac{|z^2 - i|}{2} \quad (\because\ |z| = 2)
\end{aligned}$$

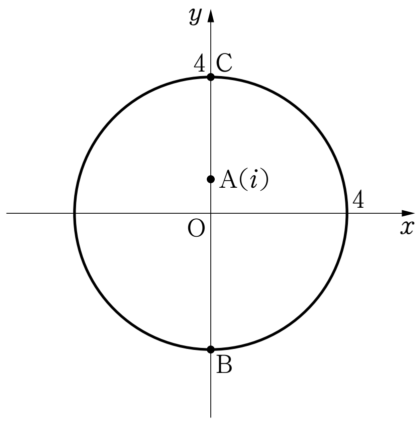
である．よって, $\mathrm{P}(z^2)$，$\mathrm{A}(i)$ とすると, $\left|z - \dfrac{i}{z}\right|$ は線分 PA の長さの半分である.

$$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおくと

$$z^2 = 4(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

であるから，z が絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，z^2 は絶対値が 4 である複素数全体を動く.



以上より，複素数平面上で 2 点 $\mathrm{P}(z^2)$，$\mathrm{A}(i)$ 間の距離を考えると，$\left|z - \dfrac{i}{z}\right|$ は，$\mathrm{P} = \mathrm{B}$ のとき

最大値　$\dfrac{\mathrm{AB}}{2} = \dfrac{5}{2}$

をとり，$\mathrm{P} = \mathrm{C}$ のとき

最小値　$\dfrac{\mathrm{AC}}{2} = \dfrac{3}{2}$

をとる.

【別解終わり】

強者の戦略

もちろん，$z-\dfrac{i}{z}$ を通分せずに Q(z)，R$\left(\dfrac{i}{z}\right)$ の距離の最大値と最小値を求めることでも解くことはできるのですが，z が動くとき点 Q，R がともに動いて考えにくいので避けた方が良いです．

問 2

(1)　最初の式変形

$$\begin{aligned}&\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

がすべてです．

まず，C を積分定数として

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$$

$$\int\{f(x)\}^n f'(x)dx=\frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1}+C$$

が成り立つので，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，$\{f(x)\}^n f'(x)$ の形が含まれていないかを確認すべきです．本問題では

$$\begin{aligned}\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\\&=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+1)'\end{aligned}$$

の部分は露骨ですね．

次に $\dfrac{2x^3+1}{x^2+1}$ ですが，分子が 3 次式，分母が 2 次式なので，分子の次数を下げるために分子を分母で割って

$$\frac{2x^3+1}{x^2+1}=2x+\frac{-2x+1}{x^2+1}$$

にしましょう．これは積分に限らず大事な変形です．

$$(x^2+1)'=2x$$

と，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の形はすぐに積分できることから

$$\frac{-2x+1}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

に分けようと思えますね！

残った $\dfrac{1}{x^2+1}$ については $x=\tan\theta$ と置換する典型的な積分です．

以上のことから，冒頭の式変形

$$\begin{aligned}&\frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

に至ります．積分の計算については解答の通りです．

(2)　これは，2 倍角・半角の公式で

$$\begin{aligned}1-\cos x&=2\sin^2\frac{x}{2}\\1+\cos x&=2\cos^2\frac{x}{2}\end{aligned}$$

と変形できるかが勝負です．$1-\cos x$，$1+\cos x$ を見たときにこのように書き換えられると意識しておきましょう．よく使う変形です．

次に，ルートを外すときに注意してください．

$$\sqrt{\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\left|\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\right|$$

ですが，積分区間が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので絶対値を外すことができます．

ルートを外した後は，(1) でも作った $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の形になっているので容易に積分できます．C を積分定数として

$$\begin{aligned}\int\tan x\,dx&=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx\\&=\int-\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx\\&=-\log|\cos x|+C\end{aligned}$$

を基本的な積分としてやったことがあると思うので大丈夫でしょう．

ちなみに，三角関数の有理式の積分は

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

という置換をすれば計算ができるという定石があります．2 倍角・半角の変形に気づかなければこの置換をするという選択肢も出てくるでしょう．$\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ は有理式ではないですが，今回は計算できるので，やってみてください．

今回は以上です．お疲れ様でした．

（数学科　桒野）