

強者の戦略

今回は 2025 年度の京都大学の文系の第 1 問を解説します。

文系第 1 問

次の各問に答えよ。

問 1 x, y, z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする。このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ。

問 2 $n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。

(単元：整数 (数 A), 配点：30 点)

【解答】

問 1

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

は各辺正より、底が 3 の対数をとると

$$x \log_3 2025 = y = z \log_3 5$$

$$x(2 \log_3 5 + 4) = y = z \log_3 5$$

となる。ここで

$$A = \log_3 5$$

とすると、 $A \neq 0$ 、 $2A + 4 \neq 0$ であるから

$$x = \frac{y}{2A + 4}, z = \frac{y}{A}$$

と表すことができる。

$$\begin{aligned} & 2xy + 4xz - yz \\ &= \frac{y^2}{A + 2} + \frac{2y^2}{A(A + 2)} - \frac{y^2}{A} \\ &= y^2 \cdot \left\{ \frac{1}{A + 2} + \frac{2}{A(A + 2)} - \frac{1}{A} \right\} \\ &= y^2 \cdot \frac{A + 2 - (A + 2)}{A(A + 2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、示せた。

問 2

$$\begin{aligned} & \frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3} \\ &= n^2 - n + 4 + \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \end{aligned}$$

より、 $\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3}$ が整数となる正の整数 n を求める。

(i) $n = 11$ のとき

$$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} = 0$$

となり、題意を満たす。

(ii) $n \neq 11$ のとき

$$\left| \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \right| \geq 1$$

つまり

$$\frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \leq -1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

または

$$1 \leq \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が必要である。 $n > 0$ より

$$n^2 + n + 3 > 0$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$-n + 11 \leq -n^2 - n - 3 \quad \therefore 14 \leq -n^2$$

となり、これを満たす正の整数 n は存在しない。

$\textcircled{2}$ は

$$n^2 + n + 3 \leq -n + 11$$

$$n^2 + 2n - 8 \leq 0$$

$$(n + 4)(n - 2) \leq 0$$

$$-4 \leq n \leq 2$$

であり、 $n = 1, 2$ が必要である。

$$n = 1 \text{ のとき, } \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} = 2$$

$$n = 2 \text{ のとき, } \frac{-n + 11}{n^2 + n + 3} = 1$$

より、ともに題意を満たす。

以上より、求める n の値は

$$n = 1, 2, 11$$

である。

強者の戦略

【解説】

問1について

指数に文字を含む等式を利用して証明する問題で、文字を減らすことが基本方針となります。

肩にある文字を下ろすために $\log$ を利用することになります。底は 2025, 3, 5 のいずれでも良いですが、一番小さい数にすると計算が楽になることが多いです。

$$x(2\log_3 5 + 4) = y = z\log_3 5$$

が作れた段階で、 x, y, z の 3 文字のうち 2 文字を残し 1 文字で表す方針が立ちます。今回は x, z を y で表し、 $\log_3 5$ を A とおくことで、式の簡略化を図りました。

今回は計算が煩雑になりますが、正の数 k を用いて

$$2025^x = 3^y = 5^z = k$$

とおいて、 x, y, z を 1 文字で表すのも定石です。この場合

$$x = \log_{2025} k, \quad y = \log_3 k, \quad z = \log_5 k$$

のように各変数を k で表すことができます。本問では対数の底が揃わないため計算がやや煩雑になります。

問2について

問題文を

$\frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3}$ が整数となるような正の整数 n をすべて求めよ。

と読み替えると、次の方針が立ちます。

A, B は整数とする

$\frac{B}{A}$ が整数のとき

① A は B の約数

② $B = 0$ または $\left| \frac{B}{A} \right| \geq 1$ が必要

① は分子である B が具体的な数字、もしくは素数など約数に関する情報があるとき用いますが、今回は分子が $n^4 + 6n^2 + 23$ のため厳しいですね。

② については、後半の $\left| \frac{B}{A} \right| \geq 1$ が必要条件であることに注意です。これが成り立つとしても $\frac{B}{A} = \frac{5}{2}$ などと、 $\frac{B}{A}$ が整数であるとは限りません。

ただし、 $\left| \frac{n^4 + 6n^2 + 23}{n^2 + n + 3} \right| \geq 1$ としてしまうと、分子が分母より次数が高いため、この不等式を満たす n が無数に出てくることが予想できます。

よって、① にしろ ② にしろこのままの式では厳しいため、まず最初にやるべきことは

割り算を利用した分子の次数下げ

となります。

$\frac{-n+11}{n^2+n+3}$ の部分がもし $\frac{9}{n^2+n+3}$ など分子が具体的な数字であれば方針 ① の「分母は分子の約数」を利用して解くことができたが、今回は分子に n が残ったために方針 ② を用いました。

$n = 1, 2$ で本当に $\frac{-n+11}{n^2+n+3}$ の値が整数になるか確認するのを忘れないようにしましょう。

他の方針としては、 k を整数として

$$\frac{-n+11}{n^2+n+3} = k$$

$$kn^2 + (k+1)n + (3k-11) = 0$$

と n の方程式として立式することも考えられます。

$k = 0$ のときは $n = 11$ であり、 $k \neq 0$ のとき、 n の 2 次方程式は実数解をもつことが必要として「判別式は 0 以上」から k の範囲を絞り込むことで解くことができます。

問2のポイントは

- ・まず割り算によって扱う式の次数を下げて問題を単純化すること
 - ・「割り切れる (= 整数になる)」という条件を、状況に応じた適切な方針 (今回は不等式での評価) で処理すること
- の 2 点でした。

今回は以上となります。お疲れ様でした。

数学科 松浦