強者の戦略

今回は2025年度の京都大学の理系の第2問を解説したいと思います．

理系　第2問

正の整数 x，y，z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ．

（単元：整数（数A），配点：35点）

【解答】

正の整数 x，y，z が

$$x^6 + y^4 = 9z^2 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たすとする．このような x，y，z の組のうち，z の値が最小のものを求める．

$$x^3 = X\,,\ y^2 = Y$$

とおくと，X，Y は自然数であり，① は

$$X^2 + Y^2 = 9z^2$$

となる．これより，$X^2 + Y^2$ は3で割り切れる．

ここで，自然数 n に対して，n^2 を3で割った余りは次表のようになる．

$n \pmod 3$	0	1	2
$n^2 \pmod 3$	0	1	1

よって，$X^2 + Y^2$ が3で割り切れるのは X，Y がいずれも3の倍数であるときに限られ，3は素数であるからこのとき x，y も3の倍数である．ゆえに

$$x = 3a\,,\ y = 3b \quad (a\,,\ b \text{ は自然数})$$

とおけて，① は

$$3^6a^6 + 3^4b^4 = 9z^2$$
$$z^2 = 81a^6 + 9b^4 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

$a = 1$ のとき，② より

$$z^2 - 9b^4 = 81$$
$$(z + 3b^2)(z - 3b^2) = 81$$

であり

$$z + 3b^2 > z - 3b^2\,,\ z + 3b^2 > 0$$

であるから

$$(z + 3b^2\,,\ z - 3b^2) = (81\,,\ 1),\ (27\,,\ 3)$$

である．さらに

$$(z + 3b^2) - (z - 3b^2) = 6b^2$$

であることに注意すると

$$(z + 3b^2\,,\ z - 3b^2) = (27\,,\ 3)$$
$$\therefore\ (z\,,\ b) = (15\,,\ 2)$$

である（このとき，$x = 3$，$y = 6$ である）．

$a \geqq 2$ のとき，② より

$$\begin{aligned} z^2 &> 81 \cdot 2^6 \\ &= 5184 \\ &> 15^2 \end{aligned}$$

となるので

$$z > 15$$

である．

以上より，① を満たす正の整数 x，y，z の組のうち，z の値が最小のものは

$$(x\,,\ y\,,\ z) = (3\,,\ 6\,,\ 15)$$

であり，求める正の整数 N の最小値は

$$9 \cdot 15^2 = 2025$$

である．

【解説】

2025年度入試にふさわしい整数問題です．2025が平方数であることから，整数問題に絡めて出題される可能性があると踏んでいた受験生は答えが予想できたかもしれません．実際

$$2025 = 9 \cdot 15^2 = 3^6 + 6^4 \quad \cdots\cdots (*)$$

が成り立ちます．右側の等式は

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

の両辺を81倍することで得られます．

しかし，答えが分かるだけではだめで，正しく論証できたかどうかで差が付きます．「論証の京大」らしさ全開の良問です．

① を満たす正の整数 x，y，z を考えます．目につくのは x^6（すぐに値が大きくなり実験がしにくい）と右辺の9です．

まず9に着目しましょう．

$$x^6=(x^3)^2,\ y^4=(y^2)^2$$

ですので，これらは平方数です．

$$X=x^3,\ Y=y^2$$

とおくと，X^2+Y^2 が9の倍数（したがって3の倍数）であることが分かります．

「X^2+Y^2 が3の倍数であれば，
X，Y はともに3の倍数」

という命題は京大受験生であれば1度は触れたことがあると思います．「3で割った余りで分類」という京大頻出の手法でこれをまず示します．

すると，x^3，y^2 が3の倍数であることから x，y も3の倍数となり $x=3a$，$y=3b$ とおくことで ② を得ます．

z が3の倍数であることが分かるので，$z=3c$ とおいてさらに割っても良いですが，解答ではここから絞り込みに移りました．

$a=1$ のとき，解答のように因数分解することで，z，b の値は求めることができます．

$a\geqq 2$ とすると，z の値は $a=1$ のときの値である $z=15$ よりはるかに大きくなるので，$z=15$ が z の最小値であると分かります．これより N の最小値も得られます．

このように，最終的に2025が最小である，という「絞り込み」の論証が必要になります．約数・倍数の話だけでは絞り切れないので，途中で解法を切り替える柔らかい頭が必要です．a の値が1増えると x の値は3増え，それだけでも x^6 の値はかなり大きくなるので絞り込みが容易になっています．最初に x，y が3の倍数であると示した効果がここに出ています．

x，y が3の倍数であることに気付かなければ，次のように愚直に絞っていくことも可能ではあります．(*) が見えていれば，$x\geqq 4$ では $N>2025$ となるので，$x=1,\ 2,\ 3$ のときを考えれば十分です．エレガントではありませんが，実戦的かもしれませんので別解として掲載します．

【別解】

正の整数 x，y，z が

$$x^6+y^4=9z^2 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たすとする．このような x，y，z の組のうち，z の値が最小のものを求める．

・$x=1$ のとき

$$9z^2-y^4=1$$
$$(3z+y^2)(3z-y^2)=1 \quad \cdots\cdots ③$$

であるが

$$3z+y^2\geqq 3+1>1$$

であるから，③ を満たす自然数 y，z は存在しない．

・$x=2$ のとき

$$9z^2-y^4=64$$
$$(3z+y^2)(3z-y^2)=64$$

である．

$$3z+y^2>3z-y^2,\ 3z+y^2>0$$

であるから

$$(3z+y^2,\ 3z-y^2)=(64,\ 1),\ (32,\ 2),\ (16,\ 4) \quad \cdots\cdots ④$$

である．ところが

$$(3z+y^2)+(3z-y^2)=6z$$

であり，これは6の倍数であるから，④ を満たす自然数 y，z は存在しない．

・$x=3$ のとき

$$9z^2-y^4=729$$
$$(3z+y^2)(3z-y^2)=729$$

である．

$$3z+y^2>3z-y^2,\ 3z+y^2>0$$

であるから

$$(3z+y^2,\ 3z-y^2)=(729,\ 1),\ (243,\ 3),\ (81,\ 9) \quad \cdots\cdots ⑤$$

である．

$$(3z+y^2)+(3z-y^2)=6z$$
$$(3z+y^2)-(3z-y^2)=2y^2$$

に注意すると，⑤の組のうち自然数 y，z が存在するものは

$$(3z+y^2,\ 3z-y^2)=(81,\ 9)$$

である．このとき

$$y=6,\ z=15$$

であり

$$N=9\cdot 15^2=2025$$

である．

・$x \geqq 4$ のとき

$$\begin{aligned} N &= x^6+y^4 \\ &> 4^6 \\ &= 4096 \\ &> 2025 \end{aligned}$$

である．

以上より，求める N の最小値は 2025 である．

（別解終）

それでは，今回はここまでにしたいと思います．また次回をお楽しみに．

（数学科　川﨑）