強者の戦略

今回は2025年度の京都大学の文系の第2問を解説したいと思います。

文系　第2問

実数 a，b についての次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$　ある実数係数の2次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ．

この条件 $(*)$ を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ．

（単元：恒等式（数 II），配点：30点）

【解答】

実数係数の2次式 $f(x)$ を

$$f(x) = px^2 + qx + r \quad (p \neq 0)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} &f(f(x)) + c \\ &= p\{f(x)\}^2 + qf(x) + r + c \\ &= p(px^2 + qx + r)^2 + q(px^2 + qx + r) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + r + c \\ &= p^3x^4 + 2p^2qx^3 + (2pr + q^2 + q)px^2 \\ &\qquad + (2pr + q)qx + (pr + q + 1)r + c \end{aligned}$$

である．条件 $(*)$ より，2次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

がすべての実数 x について成り立つので，この等式を満たす p，q，r，c が存在するような実数 a，b の条件を求める．x^4 の係数を比べると

$$p^3 = \frac{1}{8} \qquad \therefore \quad p = \frac{1}{2}$$

である．これと他の項の係数を比べることで，条件は

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2}q & \cdots\cdots ① \\ b = \dfrac{1}{2}(r + q^2 + q) & \cdots\cdots ② \\ 0 = (r + q)q & \cdots\cdots ③ \\ 0 = \left(\dfrac{1}{2}r + q + 1\right)r + c & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

である．① より

$$q = 2a \qquad \cdots\cdots ①'$$

であり，これと ② より

$$\begin{aligned} r &= 2b - q^2 - q \\ &= 2b - (2a)^2 - 2a \quad (\because\ q = 2a) \\ &= 2b - 4a^2 - 2a \qquad \cdots\cdots ②' \end{aligned}$$

であるから，③ と合わせて

$$(b - 2a^2)a = 0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．

(i)　$a = 0$ のとき，⑤ は成り立つ．また ① より $q = 0$ であり，② より

$$r = 2b$$

であるから，④ より

$$c = -2b(b + 1)$$

である．

(ii)　$a \neq 0$ のとき，⑤ より $b = 2a^2$ である．また，①′，②′ より

$$q = 2a,\ r = -2a$$

であるから，④ より

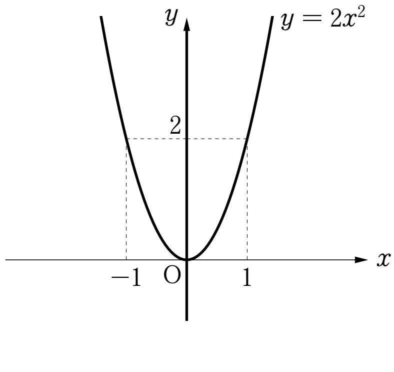
$$c = 2a(a + 1)$$

である．

したがって，実数 a，b の条件は

$$a = 0 \quad \text{または} \quad b = 2a^2$$

であり，このような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を図示すると次図の太線部分になる．



強者の戦略

【解説】

整式を用いた恒等式に関する問題なので，基本解法は「係数比較」または「数値代入」のいずれかです．今回は文字定数が a，b，c の 3 つ与えられているので，実数係数の 2 次式 $f(x)$ を文字を用いて置き，$f(f(x))$ に代入して係数比較を行っていく解法が良いでしょう．

まず実数 p，q，r を用いて $f(x)$ を

$$f(x)=px^2+qx+r \quad (p \neq 0)$$

とおき，これを与えられている恒等式の右辺の $f(f(x))$ に代入し，展開します（計算ミスに要注意）．展開し終わったら左辺の各項の係数を比べると ①～④ が得られますが，文字が 5 つあります．ここで

（$*$）「<u>ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，</u>
<u>ある実数 c に対して</u>
x についての恒等式～が成り立つ」

の下線部分（恒等式が成り立つような 2 次式 $f(x)$ と実数 c が「存在する」）より，①～④ を q，r，c に関する方程式と捉え，q，r，c を a，b を用いて表します．

①～③ を使うと a，b の関係式

$$(b-2a^2)a=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

が得られます．あとは ④ を満たす実数 c が存在することを示せば OK です．

$a=0$ のとき，$q=0$，$r=2b$ となり

$$c=-2b(b+1)$$

という実数 c について ④ が成り立ちます．

$a \neq 0$ のとき，$b=2a^2$，$q=2a$，$r=-2a$ となり

$$c=2a(a+1)$$

という実数 c について ④ が成り立ちます．

よって，条件（$*$）を満たす点 $(a,\ b)$ が満たす条件は

$$a=0 \quad \text{または} \quad b=2a^2$$

となります．

2 次式 $f(x)$ を今回は 0 でない実数 p を用いて px^2+qx+r の形で置きましたが，問題によっては $p(x-s)^2+u$，$p(x-\alpha)(x-\beta)$ の形で置くものもあります．どの形で置くのが適切かを見極める必要があります．

また，「ある実数 c に対して～が成り立つ」の部分を適切に言い換えないと正確な答案が書けません．この 2 点がかなりハードルの高いものになっていますね．

それでは，今回はここまでにしたいと思います．

（数学科　松本）