強者の戦略

今回は2025年度の京都大学の理系の第3問を解説したいと思います。

理系　第3問

e は自然対数の底とする．$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える．

$$f(x) = x^2 \log x$$

$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2\log x}$$

実数 t は $t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t\,,\ f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t\,,\ g(t))$ を通る直線を l_t とする．直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする．t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

（単元：微分法（数III），配点：30点）

【解答】

$$f'(x) = 2x\log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(1 + 2\log x)$$

である．$t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ のとき $f'(t) > 0$ であるから，直線 l_t の方程式は

$$y = -\frac{1}{t(1 + 2\log t)}(x - t) + t^2 \log t - \frac{1}{1 + 2\log t}$$

である．

点 $(p(t)\,,\ 0)$ が直線 l_t 上にあるから，代入して

$$0 = -\frac{1}{t(1 + 2\log t)}\{p(t) - t\} + t^2 \log t - \frac{1}{1 + 2\log t}$$

$$p(t) - t = t^3(1 + 2\log t)\log t - t$$

$$\therefore\ \ p(t) = t^3(1 + 2\log t)\log t$$

である．

よって

$$\begin{aligned} p'(t) &= 3t^2(1 + 2\log t)\log t \\ &\quad + t^3 \cdot \frac{2}{t} \cdot \log t \\ &\quad + t^3(1 + 2\log t) \cdot \frac{1}{t} \\ &= t^2\left\{6(\log t)^2 + 7\log t + 1\right\} \\ &= t^2(1 + \log t)(1 + 6\log t) \end{aligned}$$

である．

$t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ より $t^2 > 0$ である．また，$\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ において

$$-\frac{1}{2} < \log t \leqq 1$$

であるから

$$1 + \log t > 0$$

である．

したがって，$p(t)$ の増減表は次のようになる．

t	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{6}}$	$\cdots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$	(0)	$\searrow$	$-\dfrac{1}{9\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$3e^3$

以上から，$p(t)$ の取りうる値の範囲は

$$-\frac{1}{9\sqrt{e}} \leqq p(t) \leqq 3e^3$$

である．

【解説】

よく見る「図形量」と微積分の融合問題です．細かくテーマは違いますが，2024年度第5問，2022年度第5問，2021年度第2問，2019年度第5問，2017年度第5問などで出題されています．本問は，比較的抑え目の難易度で，問題文の要求に従って丁寧に計算していけば正答できるようなものになっています．京大を目指すにあたって，まず，このレベルの問題をしっかりと完答できる力を身につけておくと安心です．

（数学科　笹谷）