

強者の戦略

今回は 2025 年度の京都大学の文系の第 3 問を解説したいと思います。

文系 第 3 問

n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ、表が出たら 1, 裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返して、記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし、数の表し方は十進法とする。このとき、 X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(単元：確率 (数 A), 数列 (数 B), 配点：30 点)

【解答】

X が 6 で割り切れることは、 X が 2 の倍数、かつ、3 の倍数であることと同値である。

求める確率を p_n 、 k 回目の試行で記録された数字を a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) とし、 X の各桁の数字の和を S_n とする。すなわち

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

とする。以下、 p_n を求めるために、 n の値によって場合分けを行う。

(i) p_1 について

X 、すなわち、 a_1 は 1 または 2 であるから、6 で割り切れず $p_1 = 0$ である。

(ii) p_n ($n \geq 2$) について

X が 2 の倍数となるのは

$$a_n = 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

のときである。

以下、3 を法とする。 X が 3 の倍数となるのは

$$S_n \equiv 0$$

のときである。

よって、 X が 6 で割り切れるのは、 $\textcircled{1}$ かつ

$$S_{n-1} \equiv 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

のときである。

自然数 n について、 S_n が 0, 1, 2 と合同になる確率を順に q_n , r_n , s_n とする。 $n \geq 2$ のとき

$$p_n = r_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

であるから、 r_{n-1} を n で表すことを考える。

$$S_1 \equiv a_1 \equiv 1$$

となるのは、1 回目の試行で記録する数が 1 のときであるから

$$r_1 = \frac{1}{2}$$

である。次に

$$S_{n+1} \equiv 1$$

となるのは

$$S_n \equiv 0 \text{ かつ } a_{n+1} = 1$$

$$S_n \equiv 2 \text{ かつ } a_{n+1} = 2$$

のいずれかのときであり、これらは互いに排反であるから

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= q_n \cdot \frac{1}{2} + s_n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(q_n + s_n) \\ &= \frac{1}{2}(1 - r_n) \quad (\because q_n + r_n + s_n = 1) \end{aligned}$$

である。これを変形して

$$r_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(r_n - \frac{1}{3}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} r_n - \frac{1}{3} &= \left(r_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore r_n &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\because r_1 = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

すなわち

$$r_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。

よって、 $\textcircled{1}$ かつ $\textcircled{2}$ となる確率は、 $n \geq 2$ のとき

$$p_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \quad (\because \textcircled{3})$$

であり、 $n = 1$ とすると (i) の結果と一致する。

以上より、求める確率は

$$p_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

である。

強者の戦略

【解説】

まず、 X が 6 で割り切れるのは、記録された数があるようになってくるときかを考えましょう。

約数・倍数を考えると素因数分解する

と考えやすいので、6 を素因数分解すると

$$6 = 2 \cdot 3$$

となります。よって、 X が 6 で割り切れるのは、 X が 2 の倍数かつ 3 の倍数であるときであることがわかります。

X が 2 の倍数となるのは、 X の一の位が偶数のとき、すなわち、一番最後に記録した数が 2 のときです。【解答】では、一番最後に記録した数について答案を書きやすくするため、 k 回目の試行で記録された数を $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ とし、このことを ① で表しています。

次に X が 3 の倍数となるのは

X の各位の数の和が 3 の倍数のとき …… (*)

です ((*) の証明が気になる方は、解説の後にある **参考** を確認してください)。これと ① が同時に成り立つのは

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + 2 \text{ が } 3 \text{ の倍数}$$

のとき、すなわち

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \text{ を } 3 \text{ で割った余りが } 1$$

のときです。このことを、【解答】では合同式を用いて ② と表していますが、②において S_{n-1} 、すなわち、「1 番目から $(n-1)$ 番目に記録した数の和」を用いているため、 $n = 1$ のときだけ「1 番目から 0 番目に記録した数の和」となり、意味が通じなくなってしまう。そのため、【解答】では $n = 1$ のときと $n \geq 2$ のときで、場合分けをしています。

ここまでで準備が整いました。以下、この問題の目的である ① かつ ② となる確率を考えましょう。①となるのは、 n 回目の試行で硬貨の裏が出たときなので、求める確率は

$$(\text{② となる確率}) \times \frac{1}{2} \dots\dots\dots \text{④}$$

です。以下、② となる確率を考えることにします。

答案を書く際に、 $n-1$ のまま書き続けるのは少し面倒なので、ひとまず

$$S_n \equiv 1 \pmod{3} \dots\dots\dots \text{⑤}$$

となる確率を求めることにしましょう。まず、 n が小さいときに ⑤ となるような $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を書き上げてみると、 $n = 2$ のときは

$$(a_1, a_2) = (2, 2)$$

のときで、 $n = 3$ のときは

$$(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$$

のときです。このように、 n が小さければすべて書き上げることが可能ですが、 n が大きくなるにつれ大変な作業になってしまいますので、何か工夫をしたいところです。

- ・具体的に書き上げることが困難
 - ・ n のときに「ある状態 (今回は ⑤)」になっている確率を求めたい (途中で「ある状態」になっているかどうかは考慮不要)
- という条件が揃っているときは、確率漸化式

の出番です！ 確率漸化式を用いると、⑤ となる確率を r_n とおいてしまうことで、 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の内容を細かく考えなくても、 n 回分をまとめて扱うことができるようになります。

また、確率漸化式を用いる際、準備段階では

n のときに起こり得る状態すべての確率に名前をつける

のがお勧めです。3 を法としたとき、 S_n は 1 以外にも 0 または 2 と合同になる可能性がありますので、【解答】のように S_n が 0, 1, 2 と合同になる確率を順に q_n, r_n, s_n と名前をつけておきます。そうすると、これらは互いに排反であり、なおかつ、今回は途中で試行を止める可能性がない問題なので、 n の値によらず

$$q_n + r_n + s_n = 1 \dots\dots\dots \text{⑥}$$

が使えるようになり、後半の漸化式を解く部分がスムーズになります。

強者の戦略

さらに、確率漸化式を立式する際には

$n+1$ (回分) を n (回分) と 1 (回分) に分ける

ことがコツで、ほとんどの入試問題では、最後の1回か最初の1回を分けて考えることで漸化式を立式することができます。この問題では、最後の1回を分けて考えると「 $a_{n+1} = 1$ 」または「 $a_{n+1} = 2$ 」の2パターンしかないため、それぞれに適する S_n を考えることで

$$S_{n+1} \equiv 1$$

となるのは

$$S_n \equiv 0 \text{ かつ } a_{n+1} = 1$$

$$S_n \equiv 2 \text{ かつ } a_{n+1} = 2$$

のいずれかのとき、と書き上げることができます。特に記述式の試験においては、漸化式を立式する前に、立式しようとしている漸化式が成り立つ理由を伝えるようにしましょう。

漸化式が立式できれば、そこに⑥を適用することで、「 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型」、つまり、特性方程式を利用して解くタイプの隣接二項間漸化式にすることができます。途中で初項が必要となりますので、 r_1 を求めておくことを忘れずに。

求めた r_n の番号を1つ小さくした r_{n-1} が「②となる確率」ですから、これを③に代入することで確率を求めることができます。

最後に、(ii)では $n \geq 2$ で考えていたので、階差数列を用いて一般項を求めるときと同じように、 $n = 1$ のときに (i) の結果と一致するかどうかの確認をしておきましょう。

京都大学の文系の入試では、2021年度入試の第3問で確率漸化式の問題が、2022年度入試の第2問では場合の数で漸化式を作成すると考えやすい問題が出題されています。また、2021年度入試の第5問、2018年度入試の第3問では3で割った余りに注目すると考えやすい問題が出題されています。今回の問題で学んだ解法・考え方を用いて、取り組んでみるのはいかがでしょうか。

参考

【解説】にある(*)の部分の証明は以下のようになります。大学入試本番の際、他の問題もすべて解き終わって時間が余ったときなどは、この証明も答案に書いておくのがよいでしょう。自分ができることを、大学側にさらにアピールすることができます。

(証明)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

であり

$$\begin{aligned} X &= a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot 10^{n-k} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} X - S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot 10^{n-k} - \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (10^{n-k} - 1) \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

である。

以下、3を法とする。 a_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) は整数であるから、⑦より

$$\begin{aligned} X - S_n &\equiv \sum_{k=1}^n a_k (1^{n-k} - 1) \equiv 0 \\ \therefore X &\equiv S_n \end{aligned}$$

である。

以上より、 X と S_n を3で割った余りは一致するので、 X が3の倍数であることと S_n が3の倍数であることは同値である。□

(数学科：中西)