

強者の戦略

今回は 2025 年度の京都大学の理系の第 4 問を解説したいと思います。文系第 5 問が本問の (1) の一部のみの出題で、ほとんど文理共通の問題です。

理系第 4 問

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。 s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L 、直線 OB 上の点 M 、直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{OL} = s\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON} = u\overrightarrow{OC}$$

が成り立つようにとる。

(1) s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 L, M, N の定める平面 LMN は、 s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに、そのような点 P はただ一つに定まることを示せ。

(2) 四面体 $OABC$ の体積を V とする。(1) における点 P について、四面体 $PABC$ の体積を V を用いて表せ。

(単位：空間ベクトル(数 C)、配点：35 点)

【解答】

(1) s, t, u は

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$$

すなわち

$$\frac{1}{4s} + \frac{1}{2t} + \frac{3}{4u} = 1 \quad \dots\dots\dots ①$$

を満たす。ここで

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$$

によって定まる点 Q をとる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{4s}\overrightarrow{OL} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4u}\overrightarrow{ON} \end{aligned}$$

である。① より $\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ の係数の和が 1 であることから、点 Q は s, t, u の値に関わらず平面 LMN 上にある。

次に、 s, t, u の値に関わらず平面 LMN が通る定点は Q のみであることを示す。

実数 p, q, r を用いて

$$\overrightarrow{OX} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$$

によって定まる点 X をとる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{p}{s}\overrightarrow{OL} + \frac{q}{t}\overrightarrow{OM} + \frac{r}{u}\overrightarrow{ON} \end{aligned}$$

であるから、点 X が平面 LMN 上にあるための条件は

$$\frac{p}{s} + \frac{q}{t} + \frac{r}{u} = 1 \quad \dots\dots\dots ②$$

である。

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから、「① を満たすすべての (s, t, u) に対して ② かつ

$$(p, q, r) \neq \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

を満たす実数の組 (p, q, r) が存在しないことを示せばよい。

このような (p, q, r) が存在することを仮定すると

$$\begin{aligned} (s, t, u) \\ = (1, 1, 3), (2, 1, 2), (2, 4, 1) \end{aligned}$$

は ① を満たすことから、 (p, q, r) は

$$\begin{cases} p + q + \frac{r}{3} = 1 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p}{2} + q + \frac{r}{2} = 1 & \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p}{2} + \frac{q}{4} + r = 1 & \dots\dots\dots ⑤ \end{cases}$$

を満たす必要がある。

④ と ⑤ の辺々の差をとると

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}q - \frac{r}{2} &= 0 \\ r &= \frac{3}{2}q & \dots\dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

となる。⑥ を ③ に代入して

$$p + q + \frac{q}{2} = 1$$

$$p + \frac{3}{2}q = 1$$

となり、⑥ を ④ に代入して

$$\frac{p}{2} + q + \frac{3}{4}q = 1$$

$$p + \frac{7}{2}q = 2$$

強者の戦略

を得る。これらを解くと

$$(p, q) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

であり、⑥より $r = \frac{3}{4}$ となる。

しかし、これは

$$(p, q, r) \neq \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

に矛盾する。よって、示せた。

以上より、点 Q が問題文中の点 P であり、点 P はただ一つに定まることが示された。□

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{3}{4}\vec{OC} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}\right)\end{aligned}$$

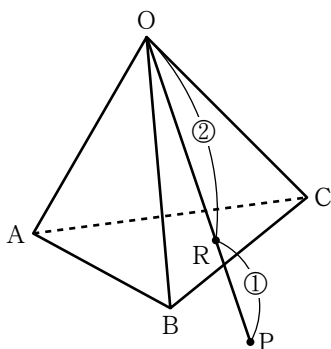
である。ここで

$$\vec{OR} = \frac{1}{6}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}$$

によって定まる点 R をとると、点 R は線分 OP を 2:1 に内分する点である。また

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

であることから、点 R は平面 ABC 上に存在する。



以上より、四面体 PABC の体積は

$$\frac{RP}{OR} V = \frac{1}{2} V$$

である。

【解説】

(1) $\vec{LM}$, $\vec{LN}$ が一次独立であるから、点 X が平面 LMN 上に存在するとき、実数 q, r を用いて

$$\vec{LX} = q\vec{LM} + r\vec{LN}$$

のように表すことができます。よって

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \vec{OL} + \vec{LX} \\ &= \vec{OL} + q(\vec{OM} - \vec{OL}) + r(\vec{ON} - \vec{OL}) \\ &= (1 - q - r)\vec{OL} + q\vec{OM} + r\vec{ON}\end{aligned}$$

となるので、 $p + q + r = 1$ を満たす p, q, r を用いて

$$\vec{OX} = p\vec{OL} + q\vec{OM} + r\vec{ON}$$

と表すことができます。【解答】は「 $\vec{OL}$, $\vec{OM}$, $\vec{ON}$ の係数の和が 1 であること」が「点 X が平面 LMN 上にあるための条件」として書いています。

【解答】中の文字をそのまま使うと、(1) で示すべきことは

$$\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4 \quad \dots\dots\dots ⑦$$

を満たすすべての (s, t, u) に対して

$$\frac{p}{s} + \frac{q}{t} + \frac{r}{u} = 1 \quad \dots\dots\dots ⑧$$

が成立する」ような (p, q, r) がただ 1 組存在することでした。

「すべての (s, t, u) に対して ⑧ が成立する」ためには「ある (s, t, u) に対して ⑧ が成立する」ことが必要です。

⑦ を満たす (s, t, u) である

$$(1, 1, 3), (2, 1, 2), (2, 4, 1) \quad \dots\dots\dots ⑨$$

に対して ⑧ が成立することが必要であることから (p, q, r) の候補を限定することができます。本問はこの必要性から

$$(p, q, r) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \quad \dots\dots\dots ⑩$$

の 1 組のみに限られます。⑩ のとき、⑦ と ⑧ が同じ等式になるので、十分性も確認できます。

もちろん必要性で用いている ⑨ は他の 3 組、例えば

$$\left(1, 2, \frac{3}{2}\right), \left(2, 2, \frac{6}{5}\right), (3, 3, 1)$$

でもかまいません。

【解答】は問題文に合わせて十分性を示した後、必要性を示す方針で書きましたが、特にこだわりがなければ必要性で候補を絞って、その候補に対

強者の戦略

して十分性を調べる方針で解答を書く方が書きやすいと思います。

- (2) (1) で求めた点 P の位置ベクトルから点 P の位置が分かるので、そこから三角形 ABC を底面と見たときの高さの比が分かります。「点の位置の情報」と「位置ベクトルの表現」の言い換えを空間・平面のいずれでもできるようにしておきましょう。

今回は以上です。お疲れ様でした。

(数学科 栗野)