

強者の戦略

今回は 2025 年度の京都大学の文系の第 4 問を解説したいと思います。

文系 第4問

座標平面において、曲線 $C_1: y = x^2 - 2|x|$ 、
曲線 $C_2: y = x^2 - 5x + \frac{7}{4}$ 、直線 $l_1: x = \frac{3}{2}$
を考える。

- (1) 点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し、さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ。
- (2) C_1 と l_2 の共有点を P とし、その x 座標を α とする。また、 l_1 と l_2 の共有点を Q とし、 C_1 と l_1 の共有点を R とする。曲線 C_1 の $\alpha \leq x \leq \frac{3}{2}$ の部分、線分 PQ 、および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ。

(単元：微分法・積分法 (数Ⅱ)、配点：30 点)

【解答】

- (1) C_1 の方程式は

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x & (x < 0) \end{cases}$$

である。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x & (x < 0) \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 - 5x + \frac{7}{4}$$

とする。

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & (x > 0) \\ 2x + 2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x - 5$$

である。

C_1 上の点 $(t, f(t))$ ($t > 0$) における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$y = (2t - 2)(x - t) + t^2 - 2t$$

$$y = (2t - 2)x - t^2 \quad \cdots \cdots ①$$

であり、 C_1 上の点 $(s, f(s))$ ($s < 0$) における接線の方程式は

$$y = f'(s)(x - s) + f(s)$$

$$y = (2s + 2)(x - s) + s^2 + 2s$$

$$y = (2s + 2)x - s^2 \quad \cdots \cdots ②$$

である。

また、 C_2 上の点 $(u, g(u))$ における接線の方程式は

$$y = g'(u)(x - u) + g(u)$$

$$y = (2u - 5)(x - u) + u^2 - 5u + \frac{7}{4}$$

$$y = (2u - 5)x - u^2 + \frac{7}{4} \quad \cdots \cdots ③$$

である。

①、③が一致する条件は

$$\begin{cases} 2t - 2 = 2u - 5 & \cdots \cdots ④ \\ -t^2 = -u^2 + \frac{7}{4} & \cdots \cdots ⑤ \end{cases}$$

である。④より

$$u = t + \frac{3}{2}$$

であり、これと⑤より

$$-t^2 = -\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$3t + \frac{1}{2} = 0$$

$$t = -\frac{1}{6}$$

となるが、これは $t > 0$ を満たさない。よって、 C_1 の $x > 0$ の部分における接線で、 C_2 とも接するものは存在しない。

次に、②、③が一致する条件は

$$\begin{cases} 2s + 2 = 2u - 5 & \cdots \cdots ⑥ \\ -s^2 = -u^2 + \frac{7}{4} & \cdots \cdots ⑦ \end{cases}$$

である。⑥より

$$u = s + \frac{7}{2}$$

であり、これと⑦より

$$-s^2 = -\left(s + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$7s + \frac{21}{2} = 0$$

$$s = -\frac{3}{2}$$

となり、これは $s < 0$ を満たす。このとき、⑥より $u = 2$ である。よって、 C_1 の $x < 0$ の部分に

強者の戦略

おける接線で、 C_2 とも接するものがただ一つ存在する。

以上より、点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し、さらに C_2 とも接するような直線がただ一つ存在することが示された。

(2) (1) より

$$P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) \quad \left(\alpha = -\frac{3}{2}\right)$$

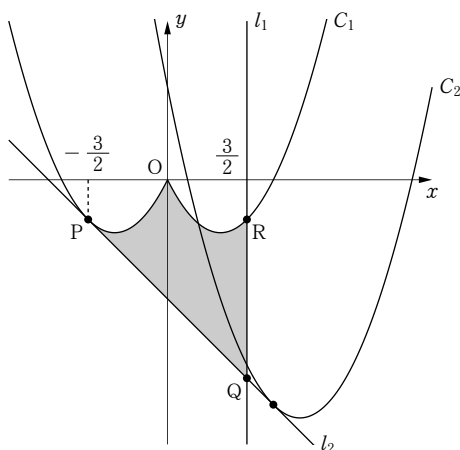
であり

$$l_2: y = -x - \frac{9}{4}$$

である。グラフは次図のようになり

$$Q\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right), R\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

である。



よって、面積を求める部分は図の色付き部分であり、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left\{ (x^2 + 2x) - \left(-x - \frac{9}{4}\right) \right\} dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ (x^2 - 2x) - \left(-x - \frac{9}{4}\right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - x + \frac{9}{4}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{3}{2}\right)^3 \right]_{-\frac{3}{2}}^0 \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{9}{4} x \right]_0^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{8} + \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{8} + \frac{27}{8} \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。

【解説】

数Ⅱ微分法・積分法の問題です。(1)は共通接線、(2)は面積がテーマで、いずれも頻出の内容です。曲線 C_1 の方程式に絶対値が含まれますが、これを外して丁寧に処理しましょう。本番であれば、しっかり得点を稼ぎたい問題です。

(1) 共通接線に関しては

- (i) 接点を共有する共通接線
- (ii) 接点異なる共通接線

の2パターンが考えられます。本問は(ii)のタイプです。それぞれの曲線で接点の x 座標を設定し、接線を立式します。

C_1 の方程式にある絶対値は外して考えます。絶対値のまま微分はできません。また

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x & (x < 0) \end{cases}$$

に対して

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & (x \geq 0) \\ 2x + 2 & (x < 0) \end{cases}$$

とするのも誤りです。グラフを見ると分かりますが、 $x = 0$ で C_1 に接線を引くことはできません。 $x = 0$ を外して

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & (x > 0) \\ 2x + 2 & (x < 0) \end{cases}$$

としましょう。問題文に「点 $(0, 0)$ と異なる点で」とあるのはこの部分を議論しないで済むようにする配慮です。

C_1 上の点 $(t, f(t))$ ($t > 0$) における接線は解答中の①のように表せます。同様に C_2 上の点 $(u, g(u))$ における接線は③のように表すことができ、これらが一致する条件(傾きと y 切片が一致)を立式します。すると、④、⑤の連立方程式が得られ、これを解くのですが、 $t > 0$ の範囲に

強者の戦略

解がないので、 C_1 の $x > 0$ の部分と C_2 には共通接線はないことが分かります。

同様のことを C_1 の $x < 0$ の部分に関しても行くと、こちら側では連立方程式 ⑥、⑦ が $s < 0$ を満たす解をただ一つもち、共通接線が 1 本だけ存在することが言えます。これで示せました。

なお、本問は登場する曲線が放物線なので

(i) 片方の曲線で接線の方程式を立式

(ii) もう片方の曲線と連立 (2 次方程式に)

(iii) (判別式) = 0 で接する条件を立式

として、共通接線をもつ条件を捉えることも可能です。

(2) (1)での計算から、P、Q、Rの座標や直線 l_2 の方程式は求まります。また、グラフを描けば、 C_1 が直線 l_2 (線分 PQ) の上側にあることも分かります。あとは、積分計算を丁寧にいきましょう。

解答では $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ と $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ の部分に分けて計算しました。前者の積分では

$$\int (x+a)^2 dx = \frac{1}{3}(x+a)^3 + C$$

(C は積分定数)

とかたまりで積分をしています。これは放物線とその接線が絡む図形の面積計算でよく現れますので、使いこなせるようにしてください。

解答では最もオーソドックスと思われる方法を紹介しました。本問の面積計算に関しては、色々と工夫ができますので、それを別解の形で紹介したいと思います。

【別解】 (その 1)

(2) グラフより、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ (x^2 - 2|x|) - \left(-x - \frac{9}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2|x| + x + \frac{9}{4} \right) dx \end{aligned}$$

と立式できる。関数 $y = |x|$ は偶関数であることに注意すると

$$S = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2|x| + \frac{9}{4} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2x + \frac{9}{4} \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{9}{4}x \right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= 2 \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + \frac{27}{8} \right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。

(別解終)

積分区間が $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ と対称になっていることに着目した解答です。

一般に、 $F(x)$ が奇関数のとき

$$\int_{-a}^a F(x) dx = 0$$

となり、 $F(x)$ が偶関数のとき

$$\int_{-a}^a F(x) dx = 2 \int_0^a F(x) dx$$

が成り立ちます。 $y = |x|$ は偶関数ですので

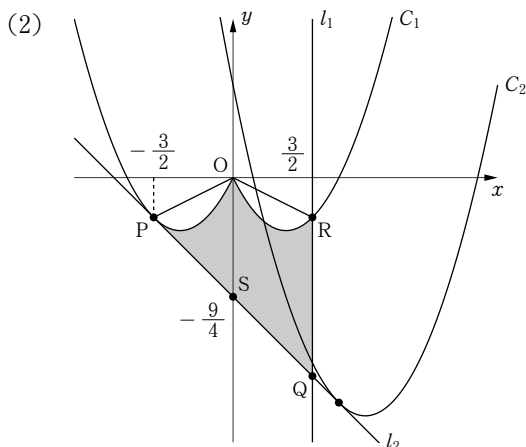
$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} |x| dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} |x| dx$$

とできます。さらに積分区間が $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ となったことで

$$2 \int_0^{\frac{3}{2}} |x| dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} x dx$$

と絶対値を外すことができます。

【別解】 (その 2)



強者の戦略

直線 OR の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x$$

である。線分 OR と C_1 で囲まれる部分の面積を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ -\frac{1}{2}x - (x^2 - 2x) \right\} dx \\ &= -\int_0^{\frac{3}{2}} x \left(x - \frac{3}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^3 \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

である。 y 軸についての対称性より、線分 OP と C_1 で囲まれる部分の面積も T に等しい。

よって、図のように点 $S(0, -\frac{9}{4})$ をとると、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= (\triangle OPS \text{ の面積}) \\ &\quad + (\text{台形 OSQR の面積}) - 2T \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{4} + 3 \right) \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{9}{16} \\ &= \frac{27}{16} + \frac{63}{16} - \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

である。

(別解終)

こちらの解答は、積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

を利用しています(通称「6分の公式」と呼んでいます。頻出公式です)。放物線と直線で囲まれた部分の面積は、この公式を用いて求めることができます。

三角形や台形といった直線図形は積分しなくとも面積が求まりますので、積分が必要な部分を「6分の公式」型の部分だけにすることで、楽に面積が求められるようにしています。

本問の類題として、京大文系 2018 年の 1 番などが挙げられます。「絶対値」+「共通接線」+「面積」です。「京大スパルタン」の数学 [IAIIBC] でも扱っ

ていますので、購入している人は確認してみてください。似たテーマが出題されることもありますので、過去問の演習は是非しっかりとやってください。

それでは今回はここまでにしたいと思います。

(数学科 川崎)