強者の戦略

今回は2025年度の京都大学の理系の第5問を解説したいと思います。

理系　第5問

θ は実数とする．xyz 空間の2点

$$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$
$$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする．θ が $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ．

単元：軌跡（数 II），空間ベクトル，２次曲線（数 C）
配点：30 点

【解答】

求める軌跡上の点の座標を $\mathrm{Q}(X,\ Y,\ 0)$ とおく．点 Q は直線 AP 上の点であるから，実数 α を用いて

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\
&=\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\
&\qquad+\alpha\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\
&=\left(\alpha\cos\theta,\ \alpha\sin\theta,\right.\\
&\qquad\qquad\left.\frac{\sqrt{2}}{4}+\alpha\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

と表すことができる．よって

$$\begin{cases}X=\alpha\cos\theta & \cdots\ ①\\ Y=\alpha\sin\theta & \cdots\ ②\\ 0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\alpha\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) & \cdots\ ③\end{cases}$$

が成り立つ．③より

$$\alpha\left(1-\sqrt{2}\cos\theta\right)=1$$

である．$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta\leqq 1 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ④$$

$$1-\sqrt{2}\leqq 1-\sqrt{2}\cos\theta<0$$

であるから

$$\alpha=\frac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta}\ (<0)$$

である．①に代入すると

$$X=\frac{\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta}\ (<0)$$
$$\left(\sqrt{2}X+1\right)\cos\theta=X \quad\cdots\cdots(*)$$

である．$X=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，$(*)$ を満たす θ が存在しないので，$X\neq-\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$\cos\theta=\frac{X}{\sqrt{2}X+1} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑤$$

である．②より

$$Y=\frac{\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sin\theta&=Y\left(1-\sqrt{2}\cos\theta\right)\\
&=Y\left(1-\frac{\sqrt{2}X}{\sqrt{2}X+1}\right)\quad(\because\ ⑤)\\
&=\frac{Y}{\sqrt{2}X+1} \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑥
\end{aligned}$$

である．よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}X+1}\right)^2+\left(\frac{Y}{\sqrt{2}X+1}\right)^2=1 \quad\cdots\ ⑦$$
$$X^2+Y^2=\left(\sqrt{2}X+1\right)^2$$
$$\therefore\ \left(X+\sqrt{2}\right)^2-Y^2=1 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

が得られる．

また，④より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta\leqq 1$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{X}{\sqrt{2}X+1}\leqq 1 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ⑧$$

であり，$X<0$ より $\sqrt{2}X+1<0$ であるから

$$1\leqq\frac{\sqrt{2}X+1}{X}<\sqrt{2}$$
$$1-\sqrt{2}\leqq\frac{1}{X}<0$$
$$\therefore\ X\leqq-\sqrt{2}-1\quad(\because\ X<0)$$

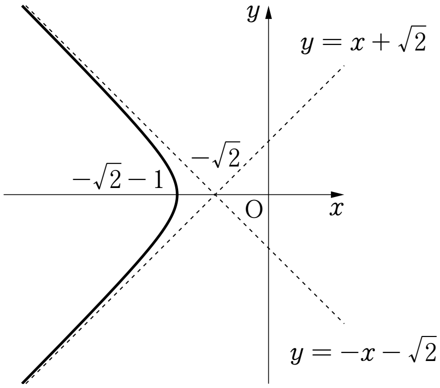
である．

以上より，求める点Qの軌跡は

$$\left(x+\sqrt{2}\right)^2-y^2=1 \quad \left(x \leqq -\sqrt{2}-1\right)$$

（双曲線の一部）

であり，これを図示すると次図のようになる．



【解説】

座標空間内で軌跡を求める問題になっていますが，やるべきことは座標平面内で軌跡を求める問題と同じです．

求める軌跡上の点Qの座標を（xy 平面上にあるので）$(X\,,\ Y\,,\ 0)$ とおきます．点Qが直線AP上にあるのでベクトルを使って直線のベクトル方程式を立てます．このとき，Qの z 成分が0であることから，α を θ で表せ，その後 θ を消去していきます．解答では点Qが xy 平面上に存在するという条件，および，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いてパラメータを消去しています．

最後に点Qの存在範囲（軌跡の限界）を調べます．

⑤　$\cos\theta=\dfrac{X}{\sqrt{2}X+1}$

かつ

⑥　$\sin\theta=\dfrac{Y}{\sqrt{2}X+1}$

を満たす実数 θ が $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ に存在するための $X\,,\ Y$ の条件は

⑦　$\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}X+1}\right)^2+\left(\dfrac{Y}{\sqrt{2}X+1}\right)^2=1$

かつ

⑧　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{X}{\sqrt{2}X+1}\leqq 1$

が成り立つことです．

したがって，点Qの軌跡は双曲線（*）のうち，⑧を満たす部分となります．

それでは，今回はここまでにしたいと思います．

（数学科　松本）