強者の戦略

今回は2025年度の京都大学の文系の第5問を解説したいと思います。

> ## 文系　第5問
> 座標空間の4点O，A，B，Cは同一平面上にないとする．s，t，uは0でない実数とする．直線OA上の点L，直線OB上の点M，直線OC上の点Nを
> $$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
> が成り立つようにとる．s，t，uが
> $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3点L，M，Nの定める平面LMNは，s，t，uの値に無関係な一定の点を通ることを示せ．

（単元：ベクトル（数C），配点：30点）

【解答】

$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$より

$$\frac{1}{4s}+\frac{1}{2t}+\frac{3}{4u}=1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

4点O, A, B, Cは同一平面上にないので，s，t，uは0でない実数で

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つとき，4点O，L，M，Nも同一平面上にない．

平面LMN上の任意の点をPとすると，k，l，mを

$$k+l+m=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を満たす実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=k\overrightarrow{\mathrm{OL}}+l\overrightarrow{\mathrm{OM}}+m\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\&=ks\overrightarrow{\mathrm{OA}}+lt\overrightarrow{\mathrm{OB}}+mu\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

と表せる．ここで

$$k=\frac{1}{4s},\ l=\frac{1}{2t},\ m=\frac{3}{4u}$$

とすると，①よりこのk，l，mは②を満たす．このとき③は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となり，点Pはs，t，uによらない定点となる．

以上より，平面LMNはs，t，uの値に無関係な一定の点を通ることが示された．　□

【解説】

まず，平面LMN上にある点について考えるために，平面LMNのベクトル方程式を立式しましょう．平面LMNのベクトル方程式には，平面LMN上の任意の点をPとし，x，y，k，l，mを実数として

1. $\overrightarrow{\mathrm{LP}}=x\overrightarrow{\mathrm{LM}}+y\overrightarrow{\mathrm{LN}}$　（x，yは任意）
2. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+x\overrightarrow{\mathrm{LM}}+y\overrightarrow{\mathrm{LN}}$　（x，yは任意）
3. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OL}}+l\overrightarrow{\mathrm{OM}}+m\overrightarrow{\mathrm{ON}}$　（$k+l+m=1$）

などの表し方がありますが，【解答】では問題で与えられた

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{t}+\frac{3}{u}=4$$

を変形して得られる①が使いやすいように，3の表し方を用いています．また，ベクトルの問題を考える際は，なるべく

一次独立な定ベクトルの実数倍の和・差で表す

と扱いやすくなるので，問題で与えられた関係式を代入して③の形まで変形しておくと，以下の流れにつながりやすくなります．

次に，k，l，mが②を満たす実数であれば点Pは平面LMN上にあるので，うまくk，l，mを定めることでs，t，uの値によらず点Pの位置が定まるようにできないか，すなわち，③からs，t，uを消去できないかを考えます．

s，t，uを消去するために，k，l，mの分母にそれぞれs，t，uがいてほしい……と考えることができれば，【解答】の①，②を比較することで

$$k=\frac{1}{4s},\ l=\frac{1}{2t},\ m=\frac{3}{4u}$$

の組を見つけることができるでしょう．

以下の《**Point1**》は，共通テストを解く際にも活用できることがあるので，習得しておくとよいでしょう．

《Point1》

以下，ベクトルの始点が揃っていることに注意する．空間内において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が一次独立であるとき，点 P が平面 ABC 上にあるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(k+l+m=1)$$

を満たす実数 k，l，m が存在することである．

また，平面ベクトルでは，次の **《Point2》** が使える場面があるので，**《Point1》** と合わせておさえておきましょう．

《Point2》

以下，ベクトルの始点が揃っていることに注意する．平面内において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が一次独立であるとき，点 P が直線 AB 上にあるための必要十分条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad(k+l=1)$$

を満たす実数 k，l が存在することである．

参考　「s，t，u の値を色々変えて試してみよう」という発想とつなげる場合は，以下のような別解も考えられます．

別解

平面 LMN 上の任意の点を P とすると，x，y を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OL}}+x\overrightarrow{\mathrm{LM}}+y\overrightarrow{\mathrm{LN}}\\&=(1-x-y)\overrightarrow{\mathrm{OL}}+x\overrightarrow{\mathrm{OM}}+y\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\&=(1-x-y)s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+xt\overrightarrow{\mathrm{OB}}+yu\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots ④$$

と表せる．

ここで，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす $(s,\ t,\ u)$ の組のうち

$$(s,\ t,\ u)=(-1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1),\ (1,\ 1,\ 3)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

に対応する 3 つの平面 LMN を考える．

$(s,\ t,\ u)=(-1,\ 1,\ 1)$ のとき，平面 LMN 上の点 Q は ④ より x_1，y_1 を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-(1-x_1-y_1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x_1\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y_1\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と表せる．

$(s,\ t,\ u)=(2,\ 4,\ 1)$ のとき，平面 LMN 上の点 R は ④ より x_2，y_2 を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2(1-x_2-y_2)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4x_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y_2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と表せる．

$(s,\ t,\ u)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき，平面 LMN 上の点 S は ④ より x_3，y_3 を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-x_3-y_3)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x_3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3y_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots\cdots ⑦$$

と表せる．

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{8},\ x_3=\frac{1}{2}$$
$$y_1=\frac{3}{4},\ y_2=\frac{3}{4},\ y_3=\frac{1}{4}$$

とすれば，⑤，⑥，⑦ より 3 点 Q，R，S は一致し，これら 3 平面は定点 P を通る．点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots\cdots ⑧$$

を満たす点である．

逆に，点 P が ⑧ を満たすとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{1}{4s}\cdot s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2t}\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4u}\cdot u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\frac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\frac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

であり，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ より

$$\frac{1}{4s}+\frac{1}{2t}+\frac{3}{4u}=1$$

であるから，点 P は s，t，u の値によらず平面 LMN 上の点である．

以上より，平面 LMN は s，t，u の値に無関係な一定の点を通ることが示された．　□

【**別解** の解説】

平面 LMN が s，t，u の値によらず通る定点があるならば，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす $(s,\ t,\ u)$ の

組を具体的に3組定めたときの3平面はその定点を通らなければなりません．そこでまずは，3平面の共有点を考えましょう．

別解 では，$(*)$ の3組について平面のベクトル方程式を考えていますが，この3組で定まる3平面が必ず共有点をもつとは限らないため，答案を書く際に注意が必要です．係数比較をして連立方程式を解く部分は計算用紙の方に書き，そこから得られた x_1，x_2，x_3，y_1，y_2，y_3 の値のみを答案に書いて，その値のときに確かに3点Q，R，Sが一致するので3平面は1点Pを共有する，という順番の説明になるようにしましょう．

（計算用紙に書く部分）

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は一次独立であるから

$$\begin{cases} -(1-x_1-y_1)=2(1-x_2-y_2) \\ \qquad\qquad\qquad =1-x_3-y_3 & \cdots\cdots ⑨ \\ x_1=4x_2=x_3 & \cdots\cdots ⑩ \\ y_1=y_2=3y_3 & \cdots\cdots ⑪ \end{cases}$$

である．⑨ より

$$\begin{cases} -(1-x_1-y_1)=2(1-x_2-y_2) \\ -(1-x_1-y_1)=1-x_3-y_3 \end{cases} \cdots\cdots ⑫$$

である．⑩，⑪ より

$$x_2=\frac{1}{4}x_1,\ x_3=x_1,\ y_2=y_1,\ y_3=\frac{1}{3}y_1 \quad \cdots\cdots\cdots ⑬$$

であり，これを ⑫ に代入して整理すると

$$\begin{cases} x_1+2y_1=2 \\ 3x_1+2y_1=3 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2} \\ y_1=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

である．これらを ⑬ に代入して

$$x_2=\frac{1}{8},\ x_3=\frac{1}{2},\ y_2=\frac{3}{4},\ y_3=\frac{1}{4}$$

である．

（計算用紙に書く部分はここまで）

⑧ より3平面の共有点Pが1点に定まったため，題意を満たす定点があるならば，この点Pしか可能性はありません．そこで十分性の確認として，⑧ で定まる点Pであれば，s，t，u の値によらず平面LMN上にあることを示しましょう．《**Point1**》で紹介した事実を用いたいので，係数を調整することで3つのベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ に書きかえてみると，確かに係数の和が1になっていることがわかります．

【解答】の解き方と比べると，計算量が多かったり，最後に十分性の確認が必要だったりする所がデメリットなので，数学が得意な文系志望の皆さんは【解答】の解き方が使えるようになることを目指すとよいでしょう．

（**別解** $(*)$ についての補足）

$(*)$ の3組を定める際に，なるべく分数よりは整数の方が良いと考えて，$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ において $u=1$ として

$$\frac{1}{s}+\frac{2}{t}=1$$
$$st-2s-t=0$$
$$(s-1)(t-2)=2$$

と変形した後，整数の範囲で $(s,\ t)$ の組を求めると，$s \neq 0$，$t \neq 0$ に注意して

$$(s-1,\ t-2)=(-2,\ -1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$
$$\therefore\ (s,\ t)=(-1,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3)$$

と3組求まります．**別解** においては

$$(s,\ t,\ u)=(-1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1)$$

の2組を用い，3組目の $(3,\ 3,\ 1)$ は用いずに，改めて $u=3$ として別の組を定めていますが，これには理由があります．

もし，$u=1$ として定めた3組を用いた場合，その3組については

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となり点Nと点Cが一致するため，3平面が必ず定点Cを通ることになります．さらに，（本当は証明が終わってからわかることですが）平面LMNは **別解** の ⑧ で定まる点Pも必ず通るため，CとPが同じ点でない限り，3平面が2定点C，Pを通ることになります．そのため，この3平面のうちどの2平面を選

んでも交線が直線 CP となり，3 平面の共通部分が直線 CP となってしまうので，別解のように可能性を 1 点に絞り込むことができないのです.

数値代入を利用する場合は，自分にとってなるべく有利になるものを代入できるように気をつけましょう.

（数学科　中西）