強者の戦略

今回は2025年度の京都大学の理系の第6問を解説したいと思います。

理系第6問

n は2以上の整数とする．1枚の硬貨を続けて n 回投げる．このとき，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ として，X_1，X_2，…，X_n を定める．

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

とするとき，Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ．

（単元：確率（数A），数列（数B），配点：35点）

【解答】

Y_n が奇数，かつ $X_n = 1$ である確率を a_n
Y_n が奇数，かつ $X_n = 0$ である確率を b_n
Y_n が偶数，かつ $X_n = 1$ である確率を c_n
Y_n が偶数，かつ $X_n = 0$ である確率を d_n
とすると

$$p_n = a_n + b_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$a_n + c_n = \frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

Y_{n+1} が奇数，かつ $X_{n+1} = 1$ となるのは
・Y_n が奇数，かつ $X_n = 0$ で $X_{n+1} = 1$ となるとき
・Y_n が偶数，かつ $X_n = 1$ で $X_{n+1} = 1$ となるとき
のいずれかであるから

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \quad \cdots\cdots ③$$

であり，同様にして

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad \cdots\cdots ④$$

である．

①より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= b_n + \frac{1}{2}(a_n + c_n) \quad (\because ③，④) \\ &= b_n + \frac{1}{4} \quad (\because ②) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= b_{n+1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{4} \quad (\because ④) \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \quad (\because ①) \end{aligned}$$

$$\therefore \ p_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

である．ここで Y_2 が奇数となるのは，$X_1 = X_2 = 1$ のときより

$$p_2 = \frac{1}{4}$$

であり，Y_3 が奇数となるのは

$$(X_1,\ X_2,\ X_3) = (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0)$$

のときより

$$p_3 = \frac{1}{4}$$

である．

・n が偶数のとき

$n = 2m$（m は自然数）とおくと

$$\begin{aligned} p_{2m} - \frac{1}{2} &= \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \ p_{2m} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

である．

・n が奇数のとき

$n = 2m + 1$（m は自然数）とおくと

$$\begin{aligned} p_{2m+1} - \frac{1}{2} &= \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \ p_{2m+1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

である．

以上より

n が偶数のとき

$$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$$

n が奇数のとき

$$p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

である．

強者の戦略

【解説】

直接確率を求めるのが難しく，かつ n 回試行の確率といえば確率漸化式の利用が定石です．

よくある漸化式の作り方では

Y_{n+1} が奇数となるときの X_{n+1} の条件を

Y_n が偶数のときと Y_n が奇数のとき

の 2 つの状態に分けて求めることになります．

本問では，Y_n の偶奇と X_{n+1} の値だけで Y_{n+1} の偶奇は定まらず，X_n の値にもよることが分かります．そのため，【解答】のように Y_n の偶奇と X_n の値を組み合わせた 4 つの状態を設定する必要があります．

Y_n \ X_n	1	0
奇数	a_n	b_n
偶数	c_n	d_n

このように表でまとめると

$$p_n = a_n + b_n$$

$$a_n + c_n = b_n + d_n = \frac{1}{2}$$

であることにも気づきやすいです．これらと漸化式を駆使してまず求まるのが【解答】の

$$p_{n+1} = b_n + \frac{1}{4}$$

です．さらに④が

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = \frac{1}{2}p_n$$

と変形できるため，漸化式から $\{b_n\}$ の項を消去することを考えると

$$p_{n+2} = b_{n+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$$

のように項番号が 1 つ飛ばしの漸化式をつくることができます．あとは等比数列を表す漸化式に変形し，項番号が偶数のときと奇数のときに分けて一般項を求めることになります．

【解答】では使わないため登場させませんでしたが

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

に加えて

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n$$

も成り立ちます．この 4 式のうち 1 つ目と 3 つ目を辺々足すことで

$$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2}$$

と，【解答】の②にあたるものを導出することができます．ただし，つねに n の範囲には注意が必要です．本問では問題文にある通り，特に但し書きがない場合は n は 2 以上の整数となります．よって正確には

$$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2} \quad (n \geqq 2)$$

を示したことになり，和が $\frac{1}{2}$ となるのは，第 3 項以降においてです．

$$a_n + c_n = \frac{1}{2} \quad (n \geqq 2)$$

とするには別途

$$a_2 + c_2 = \frac{1}{2}$$

を示す必要があります．

同様に漸化式の変形において，第 $n-1$ 項を登場させるときも注意が必要です．

$\{p_n\}$，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ は 2 以上の整数 n において定義されているため第 1 項が存在しません．そのため，例えば $p_{n+1} = b_n + \frac{1}{4}$ から b_n を消去するために

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$$

を

$$b_n = \frac{1}{2}p_{n-1}$$

として用いる場合は，あらかじめ $n \geqq 3$ という条件が必要になります．そのため【解答】のように第 $n-1$ 項は登場させず，第 $n+2$ 項を登場させるのが得策でしょう．

確率漸化式は京大で頻出のテーマですので，考え方を是非ともマスターしておきましょう．

（数学科　松浦）