# 強者の戦略

今回は2026年度の京都大学の文系の第1問を解説します.

## 文系第1問

$t$ は $0<t<1$ を満たす実数とする.座標平面において,円 $C:x^2+y^2=1$ 上で,$y$ 座標が $t$ であり,さらに第1象限にある点Pをとる.点PにおけるCの接線を $l$ とし,放物線 $y=2-x^2$ と接線 $l$ で囲まれる図形の面積を $S$ とする.$t$ が $0<t<1$ の範囲を動くとき,$S$ の最小値を求めよ.

(単元:図形と方程式・積分(数Ⅱ),配点:30点)

【解答】

点Pは円 $C$ 上の第1象限の点であり,$y$ 座標が $t$ であるから,その座標は $\left(\sqrt{1-t^2},\ t\right)$ と表せる.点Pにおける $C$ の接線 $l$ の方程式は

$$\sqrt{1-t^2}x+ty=1$$

である.これを $y$ について解くと,$0<t<1$ より

$$y=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x+\frac{1}{t}$$

となる.接線 $l$ と放物線 $y=2-x^2$ の交点の $x$ 座標は,$x$ の2次方程式

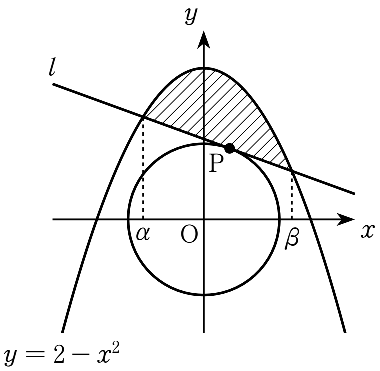
$$2-x^2=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x+\frac{1}{t}$$
$$\therefore\ x^2-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x+\frac{1}{t}-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の実数解である.

① の判別式を $D$ とすると

$$\begin{aligned}D&=\left(-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^2-4\left(\frac{1}{t}-2\right)\\&=\frac{1-t^2}{t^2}-\frac{4}{t}+8\\&=\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+7\\&=\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+3\end{aligned}$$

となり,つねに $D>0$ となる.よって,接線 $l$ と放物線は異なる2点で交わる.




これら2点の $x$ 座標を $\alpha$,$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると,放物線と接線 $l$ で囲まれる図形の面積 $S$ は

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\left\{(2-x^2)-\left(-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x+\frac{1}{t}\right)\right\}dx\\&=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

となる.

ここで,$\alpha$,$\beta$ は方程式 ① の解であるから,解の公式より

$$\beta-\alpha=\sqrt{D}$$

となる.よって,面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{6}\left(\sqrt{D}\right)^3$$

と表せる.

$S$ が最小となるのは,$D$ が最小となるときである.$0<t<1$ より $\frac{1}{t}>1$ であるから,$D$ は $\frac{1}{t}=2$ すなわち $t=\frac{1}{2}$ のとき,最小値3をとる.

したがって,$S$ の最小値は

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる.

【別解】

接線 $l$ は $y$ 軸に平行ではないので，その方程式は $y=mx+n$ とおける．点 P は第 1 象限にあるから，接線 $l$ の傾きは負であり，$y$ 切片は 1 より大きい．よって

$$m<0,\ n>1$$

となる．

円 $C:x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と接線 $l:mx-y+n=0$ の距離は円の半径 1 に等しいから

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$m^2=n^2-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる．

放物線 $y=2-x^2$ と接線 $l$ の交点の $x$ 座標は，方程式

$$2-x^2=mx+n$$

すなわち

$$x^2+mx+n-2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

の実数解である．

方程式 ③ の判別式を $D$ とすると

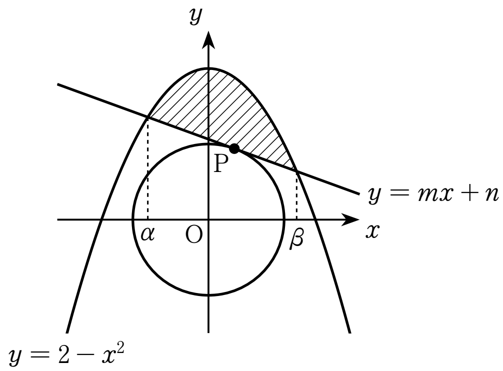
$$\begin{aligned} D&=m^2-4(n-2)\\ &=m^2-4n+8 \end{aligned}$$

となる．

これに ② を代入すると

$$\begin{aligned} D&=(n^2-1)-4n+8\\ &=n^2-4n+7\\ &=(n-2)^2+3 \end{aligned}$$

となり，つねに $D>0$ となるから，放物線と接線 $l$ は異なる 2 点で交わる．




これら 2 点の $x$ 座標を $\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，放物線と接線 $l$ で囲まれる図形の面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S&=\int_\alpha^\beta \left\{(2-x^2)-(mx+n)\right\}dx\\ &=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\\ &=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる．

解の公式より

$$\beta-\alpha=\sqrt{D}$$

となるから，面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{6}\left(\sqrt{D}\right)^3$$

と表せる．

$S$ が最小となるのは $D$ が最小となるときである．$n>1$ において，$D$ は $(m,\ n)=\left(-\sqrt{3},\ 2\right)$ のとき最小値 3 をとる．

したがって，$S$ の最小値は

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる．

【解説】

**・円の接線と面積の立式について**

図形と方程式，および積分の融合問題です．まずは問題文の条件に従って，円の接線の方程式を公式を用いて立式します．その後，放物線と直線の交点を求めるための 2 次方程式を立てます．

ここで，放物線と直線で囲まれた面積の計算になるため，いわゆる「$\frac{1}{6}$ 公式」を利用するのが定石となります．

> **$\frac{1}{6}$ 公式**
>
> $$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

本問において，交点の座標を直接求めてからまともに定積分を計算しようとすると式が非常に煩雑になります．交点の $x$ 座標を $\alpha$，$\beta$ とおき，$\frac{1}{6}$ 公式に持ち込むことで計算量の大幅な削減を図ります．

さらに，解の公式（または解と係数の関係）から，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の差は

$$\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

となります．今回は 2 次方程式の $x^2$ の係数が 1 であるため $\beta-\alpha=\sqrt{D}$（$D$ は 2 次方程式の判別式）となることを利用し

$$S=\frac{1}{6}\left(\sqrt{D}\right)^3$$

と表すのが最大のポイントです．「$S$ が最小」から「$D$ が最小」に言い換えることができ，面積の最小化を判別式の最小化に帰着させることができます．

**・【別解】のアプローチについて**

本解では接点の座標を文字 $t$ で表して接線の方程式を立てましたが，別解では最初から接線を $y=mx+n$ とおき，円の中心と接線の距離が半径 (1) に等しいという条件を用いています．

接点の座標を直接扱うと方程式に根号が含まれ，交点を求める際や判別式の計算がやや煩雑になりますが，点と直線の距離の公式を利用することで $m^2=n^2-1$ という扱いやすい関係式を導くことができます．これにより，判別式 $D$ を $n$ だけのシンプルな 2 次式で表すことができ，その後の最小値を求める計算（平方完成）も非常に見通しよく進めることが可能です．図形的性質をうまく活用して計算の負担を減らしましょう．

**・最小値の求め方について**

$D$ の式を整理すると

$$D=\frac{1-t^2}{t^2}-\frac{4}{t}+8=\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+7$$

となります．これを $t$ の関数としてグラフを考えるには数IIIの知識が必要となりますが，$\frac{1}{t}$ をひとつの変数とみなして平方完成を行うと

$$D=\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+3$$

となり，容易に最小値を求めることができます．式の形をよく観察して，計算の手間を省く工夫を常に意識しましょう．その際，$0<t<1$ より $\frac{1}{t}>1$ となることの確認を忘れないようにしてください．

本問のポイントは

1. 放物線と直線によって囲まれる部分の面積計算において，$\frac{1}{6}$ 公式を利用すること
2. 面積 $S$ を判別式 $D$ を用いて表し，最小値の処理を簡略化すること
3. 円の接線条件を工夫して立式し，計算の負担を軽減すること（別解）

の 3 点でした．定石の活用と計算の工夫が計算量を大きく変える問題です．

今回は以上となります．お疲れ様でした．

数学科　松浦