

強者の戦略

今回は 2026 年度の京都大学の理系の第 1 問を解説したいと思います。典型的なグラフの共有点に関する問題なので、是非とも完答したいところです。

理系第 1 問

a は 1 より大きい実数とし、 k は実数とする。 $0 < x < 1$ において定義された関数を

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \left(\log \frac{a}{x}\right)^2}$$

とおく。 $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど 2 個存在するような実数の組 (a, k) の集合を、座標平面上に図示せよ。ただし $\log x$ は自然対数とする。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい。

【解答】

$0 < x < 1$ において

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 \left(\log \frac{a}{x}\right)^2} \\ &= x^{-2} (\log a - \log x)^{-2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^{-3} (\log a - \log x)^{-2} \\ &\quad + x^{-2} \cdot (-2) (\log a - \log x)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x^{-3} (\log a - \log x)^{-3} \{ -(\log a - \log x) + 1 \} \\ &= \frac{2 \left(\log x - \log \frac{a}{e}\right)}{x^3 (\log a - \log x)^3} \end{aligned}$$

である。

(i) $\frac{a}{e} \geq 1$ つまり $a \geq e$ のとき
 $0 < x < 1$ において

$$\begin{aligned} x^3 (\log a - \log x)^3 &> 0, \\ \log x - \log \frac{a}{e} &< 0 \end{aligned}$$

より

$$f'(x) < 0$$

であるから、 $f(x)$ は単調減少である。よって、 $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点は 1 個以下であり、不適である。

(ii) $0 < \frac{a}{e} < 1$ つまり $1 < a < e$ のとき

$f(x)$ の $0 < x < 1$ における増減表は以下の通りである。

x	(0) ...	$\frac{a}{e}$... (1)
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow \left(\frac{e}{a}\right)^2$	\nearrow

ここで

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{1}{(\log a)^2}$$

であり

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(x \log a - x \log x)^2} \\ &= \infty \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0 \right) \end{aligned}$$

であるから、 $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点がちょうど 2 個存在するための条件は

$$\left(\frac{e}{a}\right)^2 < k < \frac{1}{(\log a)^2}$$

である。

(i)(ii) より求める (a, k) の条件は

$$\begin{cases} 1 < a < e \\ \left(\frac{e}{a}\right)^2 < k < \frac{1}{(\log a)^2} \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

$$g(a) = \left(\frac{e}{a}\right)^2, \quad h(a) = \frac{1}{(\log a)^2}$$

とおくと、 $a > 1$ において

$$g'(a) = \frac{-2e^2}{a^3} < 0,$$

$$h'(a) = -\frac{2}{a(\log a)^3} < 0$$

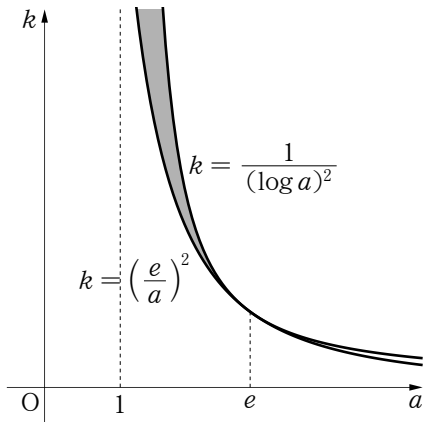
であるから、 $g(a)$ 、 $h(a)$ は単調減少である。また

$$g(e) = h(e) \quad \text{かつ} \quad g'(e) = h'(e)$$

であるから、 $k = g(a)$ と $k = h(a)$ のグラフは $a = e$ において共通接線をもつ。

以上より、 $\textcircled{1}$ を満たす (a, k) の集合を ak 平面に図示すると、以下の色付き部分になる。ただし、境界は含まない。

強者の戦略



(解答おわり)

【解説】

$f(x)$ の導関数を求めることが最大の関門と言っても過言ではありません。微分さえできれば、その後に詰まるところはないでしょう。問題文で与えられた式のまま微分すると間違いやすいので、なるべく微分しやすい形に変形してから微分をしましょう。解答中では

$$\log \frac{a}{x} = \log a - \log x$$

にして、分数を積と見て微分をしています。

$f(x)$ の増減を調べる際に注意しなければならないことは、 $\frac{a}{e}$ の大きさによって $f'(x)$ の $0 < x < 1$ における正負が変わることです。 $\frac{a}{e}$ と 1 との大小によって場合分けをしましょう。

最後に図示ですが、 $k = \left(\frac{e}{a}\right)^2$ と $k = \frac{1}{(\log a)^2}$ のグラフの位置関係に注意しましょう。今回であれば、 $a = e$ において接するような図になっていなければなりません。

ところで、冒頭で $f(x)$ の導関数を求めることが最大の関門と言いましたが、下記の別解のようにしたらどうでしょう。

【別解】

以下、 $0 < x < 1$ のもとで考える。

$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点の個数は

$$f(x) = k \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

の異なる実数解の個数に等しい。 $a > 1$ より

$$\log a - \log x > 0 \quad \therefore f(x) > 0$$

であるから、 $\textcircled{2}$ が異なる 2 つの実数解をもつためには $k > 0$ が必要であり、このとき $\textcircled{2}$ は

$$f(x) = k$$

$$x^2(\log a - \log x)^2 = \frac{1}{k}$$

$$x(\log a - \log x) = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

となる。

$$i(x) = x(\log a - \log x)$$

とおくと

$$\begin{aligned} i'(x) &= 1 \cdot (\log a - \log x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\log x + \log \frac{a}{e} \end{aligned}$$

である。

(i) $\frac{a}{e} \geq 1$ つまり $a \geq e$ のとき

$$i'(x) > 0$$

より $i(x)$ は単調増加であるから、 $i(x) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ の

実数解は 1 個以下であり、不適。

(ii) $0 < \frac{a}{e} < 1$ つまり $1 < a < e$ のとき

$i(x)$ の増減表は

x	(0) ... $\frac{a}{e}$... (1)
$i'(x)$	+ 0 -
$i(x)$	↗ $\frac{a}{e}$ ↘

であり

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} i(x) = \log a$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} i(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x \log a - x \log x)$$

$$= 0 \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0 \right)$$

であるから、 $i(x) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$\log a < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{a}{e}$$

$$\therefore \left(\frac{e}{a}\right)^2 < k < \frac{1}{(\log a)^2}$$

である。(以下同様)

(別解おわり)

強者の戦略

やっていることは【解答】とほとんど変わらないのですが、微分する関数が $f(x)$ から $i(x)$ に変わったことで計算がだいぶ楽になっています。計算ミスをしなような工夫は積極的にしていきたいですね。

今回は以上です。お疲れさまでした。

(数学科 栗野)