

強者の戦略

今回は 2026 年度の京都大学の理系・文系の第 2 問を解説したいと思います。

理系・文系 第 2 問

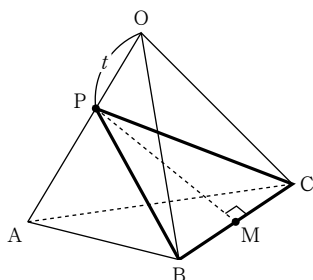
r は正の実数とする。1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA 上に点 P をとる。点 P が辺 OA 上のどこにあっても、点 P を中心とする半径 r の球面が、辺 BC と共有点をもたないような r の範囲を求めよ。ただし、点 O, A は辺 OA に含まれ、点 B, C は辺 BC に含まれるとする。

(単元：空間図形 (数 A)・空間ベクトル (数 C))

(配点：理系・文系ともに 30 点)

【解答】

辺 OA 上に点 P を、辺 BC 上に点 Q をとり、線分 PQ の長さのとりうる値の範囲を考える。



まず、点 P を固定し

$$OP = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とおく。

$0 < t \leq 1$ のとき、 $\triangle OPB$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{t^2 + 1^2 - 2 \cdot t \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{t^2 - t + 1} \end{aligned}$$

であり、これは $t = 0$ のときも成り立つ。

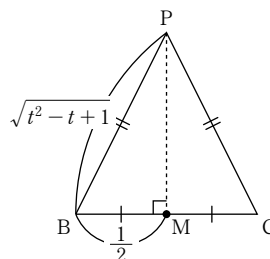
同様にして

$$PC = \sqrt{t^2 - t + 1}$$

である。よって、 $\triangle PBC$ は二等辺三角形であり、辺 BC の中点を M とおくと

$$PM \perp BC$$

である。



ゆえに

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{PB^2 - BM^2} \\ &= \sqrt{t^2 - t + 1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

である。

すると、辺 BC 上の点 Q に対して

$$PQ = \sqrt{PM^2 + MQ^2}$$

である (これは M と Q が一致するときも成立する)。

$$0 \leq MQ \leq \frac{1}{2}$$

であるから

$$\sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}} \leq PQ \leq \sqrt{t^2 - t + 1}$$

である (PQ はこの範囲内の値をくまなくとる)。

次に、 t を $0 \leq t \leq 1$ の範囲で動かす。

$$M(t) = \sqrt{t^2 - t + 1}$$

$$m(t) = \sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}}$$

とおく。

$$M(t) = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

であるから、 $M(t)$ のとりうる値の範囲は

$$M\left(\frac{1}{2}\right) \leq M(t) \leq M(0) (= M(1))$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \leq M(t) \leq 1$$

である。

また

$$m(t) = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

であるから、 $m(t)$ のとりうる値の範囲は

$$m\left(\frac{1}{2}\right) \leq m(t) \leq m(0) (= m(1))$$

強者の戦略

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

以上より、線分 PQ の長さのとりうる値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq PQ \leq 1$$

である。

したがって、求める r の範囲は ($r > 0$ に注意して)

$$0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{または} \quad 1 < r$$

である。

【解説】

空間図形の問題です。文系・理系の共通問題として出題されました。図形量の最大・最小を考える問題で、何を使って解くか「道具の選択」を自分で判断する必要のある、京大らしい問題です。

解答は、三角比の知識があれば理解できるように初等的に書きました。ベクトル既習の人は、ベクトルを使って解けますので、こちらは別解の形で後述します。

方針の立て方を確認しましょう。辺 OA 上の点 P を中心とする半径 r の球面が辺 BC と共有点をもつとき、辺 BC 上の点 Q で $PQ = r$ となる点が存在します。したがって、このような点 Q がとれないような r の条件を考えることになります。球面を扱うのは大変なので、まずは 2 点間の距離に話を噛み砕きましょう。

難しいのは、点 P、点 Q と動くものが 2 つあることです。このような 2 動点問題に対しては、「1 つ固定して順に動かす」のが定石です。どちらを固定して考えても良いですが、解答では点 P を固定し、線分 PQ を含む平面 PBC を抜き出して考えました。空間図形において、適切な平面を抜き出して考える力も非常に大事です。

余弦定理を用いることで、線分 PB、PC の長さを t で表せます。対称性から、 $\triangle PBC$ は二等辺三角形です。すると、辺 BC の中点 M を考え $\triangle PMQ$ に三平方の定理を用いることで、線分 PQ の長さのとりうる

値の範囲を

$$\sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}} \leq PQ \leq \sqrt{t^2 - t + 1}$$

と、(固定している) t で表すことができます。ここまでは点 Q が動く段階で、次に点 P を、すなわち t を動かしていきます。

$$M(t) = \sqrt{t^2 - t + 1}$$

$$m(t) = \sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}}$$

として t を動かし、線分 PQ の長さがどこまで大きく・小さくなるのかをそれぞれ考えます。根号の中は t の 2 次関数ですので値域を考えるのは容易です。

これにより、2 点 P、Q がそれぞれ辺 OA、辺 BC 上を動くとき

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq PQ \leq 1$$

となることが分かります。 r がこの範囲にあると、点 P を中心とする球面が辺 BC と共有点をもってしまうので、求める r の範囲は

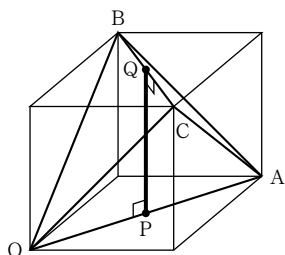
$$0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{または} \quad 1 < r$$

となります。

誤答例としては、最短距離の方だけを考えて

$0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ と答えるものや「図形的な決めつけ」(例えば「線分 PQ の長さが最小となるのは 2 点 P、Q がそれぞれ辺 OA、BC の中点のとき」を示さずに使う)などが挙げられます。 r がすごく小さいときやすごく大きいときは共有点をもたない、という図形的なイメージをもつ直観力は大事です。さらに、その上で直観に頼らずしっかり根拠を示す(採点官に「なぜ?」とつっこませない)ことも必要です。上記の例では、例えば正四面体を次図のように立方体に埋め込んで考えれば、2 点 P、Q が各辺の中点のときに線分 PQ の長さが最小であることは説明できます(線分 PQ が線分 OA、BC にともに垂直になるため)。

強者の戦略



このような説明がきちんと書けているかどうかで、点数に差がついてくるのが京大入試です。

それでは、最後にベクトルを用いる別解を紹介しておきます。

【別解】

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とおく。

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} (= 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ)$$

である。

$$\overrightarrow{OP} = t\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$$

$$(0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1)$$

とおく。

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= -t\vec{a} + (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$$

であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |-t\vec{a} + (1-s)\vec{b} + s\vec{c}|^2 \\ &= t^2|\vec{a}|^2 + (1-s)^2|\vec{b}|^2 + s^2|\vec{c}|^2 \\ &\quad - 2t(1-s)\vec{a} \cdot \vec{b} + 2s(1-s)\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad - 2ts\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= t^2 + (1-s)^2 + s^2 \\ &\quad - t(1-s) + s(1-s) - ts \\ &= t^2 - t + s^2 - s + 1 \\ &= \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 - t + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。 t を固定して、 s を $0 \leq s \leq 1$ の範囲で動かすと

$$\sqrt{t^2 - t + \frac{3}{4}} \leq PQ \leq \sqrt{t^2 - t + 1}$$

を得る（以下は解答と同様）。

ベクトルを用いる利点は、基底の設定さえできれば線分の長さを（文字式の展開と同様の計算で）計算できることです。計算してみると st の項が消え、 s と t を1つつ動かして考えれば良いことが自ずと分かります。計算に落とし込むなら、ベクトル以外に座標を設定するのも有効ですので考えてみてください。

それでは、今回はここまでにしたいと思います。また次回をお楽しみに。

（数学科 川崎）