

強者の戦略

今回は 2026 年度の京都大学の文系の第 3 問を解説したいと思います。

文系 第 3 問

p は 3 より大きい素数とする。

- (1) $2p$ 以上の整数 N は、0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができることを示せ。

- (2) 0 以上の整数 m と 0 以上の整数 k を用いて

$$N = 3m + pk$$

と表すことができないような 0 以上の整数 N の個数を求めよ。

(単元：数学と人間の活動 (数 A)、配点：30 点)

【解答】

- (1) p は 3 より大きい素数であるから、3 と p は互いに素な自然数である。よって、 $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p$ をそれぞれ 3 で割った余りは、0, 1, 2 のいずれかであり、かつ、すべて異なる。つまり

$$\{0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p\} \equiv \{0, 1, 2\} \pmod{3} \quad \text{..... ①}$$

である。このことを以下に示す。

背理法を用いて示す。すなわち、 $0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p$ のうち、3 で割った余りが等しい 2 数があるとして矛盾を導く。その 2 数を

$$ap, bp \quad (a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a < b \leq 2)$$

とすると、 k を整数として

$$bp - ap = 3k$$

$$\therefore (b - a)p = 3k$$

と表せる。3 と p は互いに素な自然数であるから、 $b - a$ が 3 の倍数となるが、 $0 \leq a < b \leq 2$ より

$$1 \leq b - a \leq 2$$

であることに矛盾する。以上より、①は示された。□

①より、 r を 0, 1, 2 のいずれかであるとする
と、 s を 0, 1, 2 のいずれかであるとして

$$r \equiv s \cdot p \pmod{3}$$

と表せるから、 t を整数として

$$r - sp = 3t$$

$$\therefore r = 3t + sp \quad \text{..... ②}$$

と表せる。

また、 $p \geq 5$ より、 N は 10 以上の自然数であるから、 N を 3 で割ったときの商を q 、余りを上で定めた r とすると

$$\begin{aligned} N &= 3q + r \\ &= 3q + (3t + sp) \quad (\because \text{②}) \\ &= 3(q + t) + ps \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

となる。 $s = 0, 1, 2$ より $0 \leq ps \leq 2p \leq N$ であるから、 $3(q + t) \geq 0$ である。このことと、 q, t がともに整数であることから、 $q + t$ は 0 以上の整数である。

よって、③において

$$q + t = m, s = k$$

とすれば

$$N = 3m + pk$$

と表すことができる。以上より、示された。□

- (2) (1) で示したことから

$$0 \leq N \leq 2p - 1 \quad \text{..... ④}$$

の範囲で考えれば十分である。この $2p$ 個の整数のうち

$$N = 3m + pk$$

と表すことができるものの個数を x とおくと、求める個数は $2p - x$ である。以下、 x について考える。

$N = 3m + pk$ と表せる N は、④より

$$0 \leq 3m + pk \leq 2p - 1$$

を満たす。これと、 $3m \geq 0$ より

$$0 \leq pk \leq 2p - 1$$

であるから

$$k = 0, 1$$

強者の戦略

に限られる．つまり， $N = 3m + pk$ と表せる N は

$$N = 3m \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

または

$$N = 3m + p \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

のいずれかの形で表せる．また，以下では m の値が異なれば N の値が異なることに注意する．

(i) $p = 3l + 1 (l \in \mathbb{N})$ のとき

④ より

$$0 \leq N \leq 2(3l + 1) - 1$$

$$\therefore 0 \leq N \leq 6l + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

である．

⑤ の形で表せるとき，⑦ より

$$0 \leq 3m \leq 6l + 1$$

$$0 \leq m \leq 2l + \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = 0, 1, \dots, 2l$$

であるから， N の個数は $2l + 1$ 個である．

⑥ の形で表せるとき，⑦ より

$$0 \leq 3m + (3l + 1) \leq 6l + 1$$

$$0 \leq 3m \leq 3l \quad (\because m \geq 0)$$

$$0 \leq m \leq l$$

$$\therefore m = 0, 1, \dots, l$$

であるから， N の個数は $l + 1$ 個である．

以上より

$$x = (2l + 1) + (l + 1) = 3l + 2 = p + 1$$

である．

(ii) $p = 3l + 2 (l \in \mathbb{N})$ のとき

④ より

$$0 \leq N \leq 2(3l + 2) - 1$$

$$\therefore 0 \leq N \leq 6l + 3 \quad \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

である．

⑤ の形で表せるとき，⑧ より

$$0 \leq 3m \leq 6l + 3$$

$$0 \leq m \leq 2l + 1$$

$$\therefore m = 0, 1, \dots, 2l + 1$$

であるから， N の個数は $2l + 2$ 個である．

⑥ の形で表せるとき，⑧ より

$$0 \leq 3m + (3l + 2) \leq 6l + 3$$

$$0 \leq 3m \leq 3l + 1 \quad (\because m \geq 0)$$

$$0 \leq m \leq l + \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = 0, 1, \dots, l$$

であるから， N の個数は $l + 1$ 個である．

以上より

$$x = (2l + 2) + (l + 1) = 3l + 3 = p + 1$$

である．

いずれの場合も， $x = p + 1$ であるから，求める個数は

$$2p - x = p - 1$$

である．

【解説】

(1) まず， N は自然数なので，3 で割ったときの商を q ，余りを r とすれば

$$N = 3q + r \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

と表すことができます．このとき，もし

r を $3t + ps$ (t, s は整数) の形で

3 の倍数と p の倍数の和で表す …… (*)

ことができれば

$$N = 3q + (3t + ps)$$

$$= 3(q + t) + ps$$

という流れで， $N = 3m + pk$ の形にまとめ直すことができそうです (正確には， m, k にあたる部分が負の整数になっていないかどうかの確認が必要です)．

ここで (*) を紐解く鍵は，次ページに挙げる「完全剰余系」にあります．

強者の戦略

【Point】「完全剰余系」

c と d が互いに素な自然数のとき

$$0 \cdot d, 1 \cdot d, \dots, (c-1)d$$

をそれぞれ c で割った余りは

$$0, 1, \dots, c-1$$

のいずれかであり、かつ、すべて異なる。つまり

$$\begin{aligned} \{0 \cdot d, 1 \cdot d, \dots, (c-1)d\} \\ \equiv \{0, 1, \dots, c-1\} \pmod{c} \end{aligned}$$

である。

「完全剰余系」を知っていれば、今回の問題では $c=3$, $d=p$ として

$$\{0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p\} \equiv \{0, 1, 2\} \pmod{3}$$

であることがわかります。つまり、⑨の r が $0, 1, 2$ のいずれであったとしても、 t を整数として

$$r = 3t + 0 \cdot p, 3t + 1 \cdot p, 3t + 2 \cdot p$$

のいずれかの形で表すことができる、とわかります。

ここまで辿り着けば、最後に【解答】③の

$$N = 3(q+t) + ps$$

の形までまとめ直した後、 N が $2p$ 以上であることから $q+t$ と s が負の整数にならないことを確かめれば、証明が完了します。

「完全剰余系」については、研伸館の高3生で京阪クラス以上の数学講座を受講している皆さんは、前期の授業内で配布されている「京大整数問題集中特訓」のテキスト内「Lecture Note」でも扱っていますので、参照してみるとよいでしょう。

- (2) (1)のおかげで、 $2p$ 以上の自然数に表せないものはないことがわかりましたから、 $2p-1$ 以下の自然数のみを考えましょう。表せないものを考えるのは、表せるものを考えるよりも比較的難しいので、表せるものの個数に注目してみましょう。

まずは、整数問題の定石の1つである

不等式で絞り込む

手法が役に立ちます。【解答】④のとき、すなわち

$$0 \leq N = 3m + pk \leq 2p-1$$

であるとき、 $3m$ が負でないことから

$$0 \leq pk \leq 2p-1$$

が成り立ちますから

$$k = 0, 1$$

しか可能性がないことがわかります。この2つの値のうち、 $k=0$ のときならば、 $N=3m$ であり、 N が3の倍数となり扱いやすいので、まずはこちらから検討してみましょう。

ここでもう一度、【解答】④による絞り込みを行ってみると

$$0 \leq N = 3m \leq 2p-1$$

すなわち

$$0 \leq m \leq \frac{2p-1}{3}$$

となります。この範囲を満たす整数 m の個数は、ガウス記号を使えば

$$\left[\frac{2p-1}{3} \right] + 1$$

と表せますが、今回はガウス記号を用いずに、個数を表したいところ。

そこで、整数問題における定石の1つである

自然数で割った余りで場合分け

を利用します。ガウス記号の中の分母が3ですから、分子を3で割ったときの様子がわかりやすい方がガウス記号を外しやすくなります。そこで、 p を3で割った余りで場合分けしてみましょう。 p は3より大きい素数であり、3で割り切れることはないなので、自然数 l を用いて

$$p = 3l + 1, 3l + 2$$

のいずれかの形で表すことができます。これを用いると、以下のようにガウス記号を外すことができます。

- ・ $p = 3l + 1$ のとき

$$\left[\frac{2p-1}{3} \right] + 1 = \left[\frac{6l+1}{3} \right] + 1 = 2l+1$$

- ・ $p = 3l + 2$ のとき

$$\left[\frac{2p-1}{3} \right] + 1 = \left[\frac{6l+3}{3} \right] + 1 = 2l+2$$

強者の戦略

p を 3 で割ったときの余りで場合分けする手法に気づくことができれば、 $k=1$ のとき、つまり、 $N=3m+p$ と表されるときも、わざわざガウス記号を用いて考えなくても、【解答】のように具体的に m の値を書き並べることで、④を満たす N の個数、すなわち

$$0 \leq N = 3m + p \leq 2p - 1$$

を満たす N の個数を求めることができます。

以上より、 $N=3m+pk$ と表せるものの個数がわかりますから、 $2p$ から引くことで結論を得ましょう。

特に (1) においては、「完全剰余系」に関する知識が無いと、解法の糸口がつかみづらく、完答することが難しい問題だと思われます。京都大学の文系数学においては、出題年度に応じて難易度のばらつきがありますが、今回のような難易度が高めの問題が出たときに（他の解きやすい問題で点数を稼ぐのはもちろんのこととして）部分点を稼いだり、完答することで他の受験生と一気に差をつけることができるように、発展的な内容であっても知識を蓄えておくことをお勧めします。

参考

【解説】にある《Point》「完全剰余系」については、以下のように証明できます。

【証明】 背理法を用いて示す。すなわち

$$0 \cdot d, 1 \cdot d, \dots, (c-1)d$$

のうち、 c で割った余りが等しい 2 数があるとして矛盾を導く。その 2 数を

$$ed, fd \quad (e, f \in \mathbb{Z}, 0 \leq e < f \leq c-1)$$

とすると、 g を整数として

$$fd - ed = gc$$

$$\therefore (f-e)d = gc$$

と表せる。 c と d は互いに素な自然数であるから、 $f-e$ が c の倍数となるが、 $0 \leq e < f \leq c-1$ より

$$1 \leq f-e \leq c-1$$

であることに矛盾する。以上より、示された。□

また、今回の問題に関する有名知識として、以下のようなものがあります。

《有名知識》

c と d が互いに素な自然数、 y, z が自然数のとき、積 cd より大きな自然数 M は、すべて

$$M = cy + dz$$

の形で表すことができる。

【証明】 先に示した「完全剰余系」において、 $0 \cdot d$ を cd に置き換えて考えると

$$\begin{aligned} & \{1 \cdot d, 2 \cdot d, \dots, (c-1)d, cd\} \\ & \equiv \{1, 2, \dots, c-1, 0\} \pmod{c} \end{aligned}$$

が成り立つ。

よって、 h を $1, 2, \dots, c-1, 0$ のいずれかでであるとすると、 i を $1, 2, \dots, c$ のいずれかでであるとして

$$h \equiv id \pmod{c}$$

と表せるから、 j を整数として

$$h - id = jc$$

$$\therefore h = jc + id \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

と表せる。

$M > cd$ のとき、 M を c で割ったときの商を q' 、余りを上で定めた h とすると

$$\begin{aligned} M &= cq' + h \\ &= cq' + (jc + id) \quad (\because \textcircled{10}) \\ &= c(q' + j) + id \quad \dots\dots\dots \textcircled{11} \end{aligned}$$

となる。 $i = 1, 2, \dots, c$ より $0 \leq id \leq cd < M$ であるから、 $c(q' + j) > 0$ である。このことと、 q', j がともに整数であることから、 $q' + j$ は自然数である。

よって、 $\textcircled{11}$ において

$$q' + j = y, i = z$$

とすれば

$$M = cy + dz$$

と表すことができることが示された。□

強者の戦略

この《有名知識》を、今回の問題に適用してみましょう。 $c = 3$, $d = p$ とすると、 $M > 3p$ を満たす自然数については、 y, z を自然数として

$$M = 3y + pz \quad \dots\dots\dots \textcircled{12}$$

と表せます。ここで

$$y = m + 1, z = k + 1$$

とすると、 m, k は 0 以上の整数であり、 $\textcircled{12}$ に代入して

$$M = 3(m + 1) + p(k + 1)$$

$$\therefore M - (p + 3) = 3m + pk$$

となります。さらに、 $M > 3p$ より

$$M - (p + 3) > 2p - 3$$

が成り立つので、 $M - (p + 3)$ が $2p - 3$ より大きい整数のとき、すなわち、今回の問題の (1) における N が $2p - 2$ 以上の整数のとき

$$N = 3m + pk$$

と表すことができる、とわかります。

(数学科：中西)