

強者の戦略

今回は 2026 年度の京都大学の理系の第 4 問を解説したいと思います。

理系第 4 問

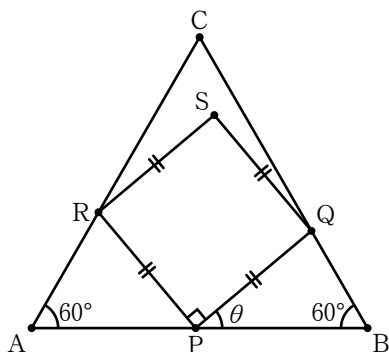
平面において、次の条件 (*) を満たす正三角形の 1 辺の長さの最小値を求めよ。

(*) 1 辺の長さが 1 の正方形であって、4 つの頂点がすべてその正三角形の内部または辺上にあるようなものが存在する。

(単元：平面図形 (数 IAIIBC), 配点：35 点)

【解答】

条件 (*) を満たす正三角形のうち、辺上にある頂点数が 2 以下のとき、正方形の頂点が存在しない正三角形の辺が少なくとも 1 つあり、その辺を内側へ平行移動しても 4 頂点を含む状態を保てるため、より小さい正三角形を作ることができる。よってこのとき正三角形は最小とならない。



上図のように、正方形の 3 頂点 P, Q, R が正三角形 ABC の辺上にある配置を考える。

$$\angle BPQ = \theta$$

とおくと

$$\angle BQP = 120^\circ - \theta,$$

$$\angle ARP = 30^\circ + \theta$$

である。この配置において点 S が正三角形 ABC の内部または辺上に存在するための条件は

$$\angle BQP \leq 90^\circ \quad \text{かつ} \quad \angle ARP \leq 90^\circ$$

すなわち

$$120^\circ - \theta \leq 90^\circ \quad \text{かつ} \quad 30^\circ + \theta \leq 90^\circ$$

であるから、 θ のとりうる値の範囲は

$$30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

$\triangle APR$ において正弦定理より

$$\frac{AP}{\sin \angle ARP} = \frac{PR}{\sin \angle PAR}$$

$$\frac{AP}{\sin(30^\circ + \theta)} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore AP = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(30^\circ + \theta)$$

であり、 $\triangle BPQ$ において正弦定理より

$$\frac{BP}{\sin \angle BQP} = \frac{PQ}{\sin \angle PBQ}$$

$$\frac{BP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore BP = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(120^\circ - \theta)$$

である。

よって、正三角形 ABC の 1 辺の長さは

$$AP + BP$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \{ \sin(30^\circ + \theta) + \sin(120^\circ - \theta) \}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin \frac{(30^\circ + \theta) + (120^\circ - \theta)}{2}$$

$$\quad \cdot \cos \frac{(30^\circ + \theta) - (120^\circ - \theta)}{2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \sin 75^\circ \cos(\theta - 45^\circ) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

である。

① より

$$-15^\circ \leq \theta - 45^\circ \leq 15^\circ$$

であるから、 $\theta - 45^\circ = \pm 15^\circ$ のとき ② は最小となり、その最小値は

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \sin 75^\circ \cos(\pm 15^\circ)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \sin^2 75^\circ$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \cos 150^\circ}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$$

である。

強者の戦略

【解説】

平面図形の問題です。図形問題に関する解法としては次の通りです。

図形問題の解法

- (1) 幾何的に考える。
- (2) 三角比・三角関数を利用する。
- (3) ベクトルを利用する。
- (4) 座標を設定する。

(1) はかなりの「ひらめき」を必要とするので、思いつけばラッキーぐらいの感覚です。今回の問題は、正方形で 90° 、正三角形で 60° があるので、(3) を使うぐらいなら (4) を使う方が楽そうです。(4) でやればほぼ確実に解けるでしょうけど、途中計算が面倒になりそうなので、解答は (2) で解くことにしました。

まず、正方形の頂点が3点以上、正三角形の辺上にあることを示します。「正三角形の内部にある点」だと自由度が高く、変数を設定するのが困難になるためです。

今回、正三角形の1辺の長さの最小値を求めたいわけですから、なるべく正方形が正三角形にくっついていた方がよいのは感覚的にも分かるでしょう。

図形量の最大最小問題の解法は次の通りです。

図形量の最大最小問題

- ① 辺や角の大きさを文字で置く。
- ② ①の文字の範囲を調べる。
- ③ ①の文字で図形量を表し、関数の最大最小に帰着する。

今回の問題は三角比・三角関数を使って解くことにしたので、①として

$$\angle BPQ = \theta$$

のように角の大きさを文字で置きました。

次に、②についてですが、条件(*)を満たすような θ の範囲を図形的に考えなければいけません。P, Q, R は辺上にあることを決めているので、S が

正三角形の内部または辺上にあることが条件です。 $\angle BQP$ や $\angle ARP$ が鈍角になると、点Sが辺BCまたは辺ACの外側に出るので条件を満たしません。直角や鋭角だと条件を満たすことが分かりますから、解答中の①の範囲を得ます。

正三角形の1辺の長さですが、 $\triangle APR$ と $\triangle BPQ$ の辺の長さの和 $AP + BP$ として求めます。 $\angle BPQ = \theta$ とおいたことによって、 $\triangle APR$ と $\triangle BPQ$ の内角はすべて分かっているので、正弦定理の使いどころでしょう。「辺の長さと言えば余弦定理」という人が多いようで、意外と正弦定理を使える人が少ないです。「対角と対辺のペアが2組」や「外接円の半径」に対しては正弦定理を使いましょう。

最後に三角関数の最小値です。解答中では $30^\circ + \theta$ と $120^\circ - \theta$ の和が一定 (θ を含まない) であることから、和積の公式

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

を利用して変形しています。「変化するのは1箇所にとめる」は大事な考え方です。もちろん、加法定理を使って展開してから合成する

$$\begin{aligned} & \sin(30^\circ + \theta) + \sin(120^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \left(-\frac{1}{2}\right) \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) \end{aligned}$$

のような式変形でもかまいません。

あとは、①で θ の範囲が出ているので最小値が求まります。ところで、 $\sin 75^\circ$ の値を覚えている人は多いと思いますが、それを既知として解答を書くのは危険です。

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

のように加法定理で求めておく方が無難でしょう。解答中ではこれを書くのが面倒だったので、2倍角・

強者の戦略

半角の公式

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

を利用することによって、 $\sin 75^\circ$ の値を求めずして
最小値を求めました。

今回は以上です。お疲れ様でした。

(数学科 栞野)