

強者の戦略

今回は 2026 年度の京都大学の理系の第 3 問を解説したいと思います。

理系 第3問

n は正の整数とする．整数係数の多項式

$$(x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$$

のすべての係数が 2^m で割り切れるような正の整数 m のうち、最大のものは $n+1$ であることを示せ。

【補足説明】

ただし、 $(x+1)^{2^{n+1}}$ は $x+1$ の 2^{n+1} 乗を表す。
 $(x^2+1)^{2^n}$ は x^2+1 の 2^n 乗を表す。 2^m は 2 の m 乗を表す。

(単元：整数・多項式 (数Ⅱ)，配点：35 点)

【考察】

多項式の係数に関する証明問題で、ぱっと見、なかなか難しそうです。「最大の m が $n+1$ であることを示すには次の 2 点を示せばよい」ということは掴みましよう。

- (1) すべての係数が 2^{n+1} で割り切れること。
- (2) $m > n+1$ のとき、 2^m で割り切れない係数があること。

第一感としては

係数が知りたいから $(x+1)^{\circ}$ を二項定理で展開かな？

とか

正の整数 n に関する証明だから、数学的帰納法が使えるかも？

あたりが思い浮かびます。

いきなり、一般の n で考え始めてもよいのですが、とりあえずよく分からない場合、 $n=1, 2, 3, \dots$ で実験してみると様子が分かるかもしれません。

$n=1$ のとき

二項定理を使うなら

$$\begin{aligned} & (x+1)^4 - (x^2+1)^2 \\ &= \sum_{k=0}^4 {}_4C_k x^k - \sum_{l=0}^2 {}_2C_l x^{2l} \\ &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \\ &\quad - (x^4 + 2x^2 + 1) \\ &= 4x^3 + 4x^2 + 4x \end{aligned}$$

となります。確かに、すべての係数が $4 (= 2^{1+1})$ で割り切れ、 2^m ($m > 2$) では割り切れない係数があることが分かります。例えば、 x の 1 次の項です。

変形で少し工夫するなら

$$\begin{aligned} & (x+1)^4 - (x^2+1)^2 \\ &= (x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 \\ &= \{(\textcolor{red}{x}^2 + \textcolor{red}{1}) + 2x\}^2 - (\textcolor{red}{x}^2 + \textcolor{red}{1})^2 \\ &= 2 \cdot 2x \cdot (\textcolor{red}{x}^2 + \textcolor{red}{1}) + (2x)^2 \\ &= 4x(x^2+1) + 4x^2 \end{aligned}$$

としてもいいかもしれません。

あるいは、 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ の形を思い浮かべて

$$\begin{aligned} & (x+1)^4 - (x^2+1)^2 \\ &= (x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 \\ &= \{(x^2+2x+1) - (x^2+1)\} \\ &\quad \cdot \{(x^2+2x+1) + (x^2+1)\} \\ &= 2x \cdot (2x^2+2x+2) \\ &= 4x(x^2+x+1) \end{aligned}$$

も使えそうです。

$n=2$ のとき

二項定理なら

$$\begin{aligned} & (x+1)^8 - (x^2+1)^4 \\ &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k x^k - \sum_{l=0}^4 {}_4C_l x^{2l} \\ &= (x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 \\ &\quad + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1) \\ &\quad - (x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1) \\ &= 8x^7 + 24x^6 + 56x^5 + 64x^4 + 56x^3 + 24x^2 + 8x \end{aligned}$$

強者の戦略

となります。確かに、すべての係数が $8 (= 2^{2+1})$ で割り切れ、 2^m ($m > 3$) では割り切れない係数があることが分かります。例えば、 x の 1 次の項です。

また

$$\begin{aligned} & (x+1)^8 - (x^2+1)^4 \\ &= (x^2+2x+1)^4 - (x^2+1)^4 \\ &= \{(x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2\} \\ & \quad \cdot \{(x^2+2x+1)^2 + (x^2+1)^2\} \end{aligned}$$

という変形をすると、前半の

$$(x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の部分は、まさに $n=1$ のときの式そのものですから、 $\textcircled{1}$ はすべての係数が 4 で割り切れます。

後半の部分

$$(x^2+2x+1)^2 + (x^2+1)^2 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について、 $\textcircled{1}$ が使えるように変形すると

$$(x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 + \mathbf{2(x^2+1)^2}$$

となります。 $\textcircled{1}$ の係数がすべて 4 で割り切れること、および、 $\mathbf{2(x^2+1)^2}$ の係数がすべて 2 で割り切れることから、 $\textcircled{2}$ のすべての係数が 2 で割り切れることが従います。

これから、 $\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ のすべての係数が 8 で割り切れることが分かるでしょう。

* * * *

このように、具体例を見ていくと

x の項の係数で、 (2) が示せそうだ

とか

二項定理を使うなら、 $x^{\text{偶数}}$ の項が Key かも？

とか

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ を使って、数学的帰納法が回せる！

とか、いろいろなことが見えてきます。

見えてきたヒントを元に、一般的に解答を作成していきます。解答例をいくつか挙げてみます。まずは、二項定理で各項の係数をすべて求め、それらについて考えていく解答です。

【解答 1】

二項定理を用いると

$$\begin{aligned} & (x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}} {}^{2^{n+1}}C_k x^k - \sum_{l=0}^{2^n} {}^{2^n}C_l x^{2l} \\ &= \sum_{l=0}^{2^n} ({}^{2^{n+1}}C_{2l} - {}^{2^n}C_l) x^{2l} + \sum_{l=0}^{2^n-1} {}^{2^{n+1}}C_{2l+1} x^{2l+1} \end{aligned}$$

となる。

$m > n+1$ のとき、 x の 1 次の項の係数 ${}^{2^{n+1}}C_1 = 2^{n+1}$ は 2^m で割り切れない。

以下、すべての係数が 2^{n+1} で割り切れることを示す。

まず、 ${}^{2^{n+1}}C_{2l+1}$ ($l=0, 1, \dots, 2^n-1$) が 2^{n+1} で割り切れることを示す。

一般に、適切な範囲の自然数 a, b に対し

$$b_a C_b = a_{a-1} C_{b-1} \quad \cdots \cdots \cdots (*)$$

が成り立つから、 $l=0, 1, \dots, 2^n-1$ のとき

$$(2l+1) {}^{2^{n+1}}C_{2l+1} = 2^{n+1} {}^{2^{n+1}-1}_{2l} C_{2l}$$

が成り立つ。 $2l+1$ と 2^{n+1} は互いに素であるから、 $l=0, 1, \dots, 2^n-1$ のとき、 ${}^{2^{n+1}}C_{2l+1}$ は 2^{n+1} で割り切れる。

次に、 ${}^{2^{n+1}}C_{2l} - {}^{2^n}C_l$ ($l=0, 1, \dots, 2^n$) が 2^{n+1} で割り切れることを示す。

$l=0$ のとき、 ${}^{2^{n+1}}C_{2l} - {}^{2^n}C_l = 1 - 1 = 0$ であるから、 2^{n+1} で割り切れる。

$l \geq 1$ のときを考える。見やすさのために $N = 2^n$ とおく。 ${}_N C_{2l} - {}_N C_l$ ($l=1, 2, \dots, N$) について、 $2N$ で割り切れることを示す。

$$\begin{aligned} & {}_{2N} C_{2l} \\ &= \frac{(2N)!}{(2l)!(2N-2l)!} \\ &= \frac{{}^{2N}C_l \cdot (2N-l) \cdot (2N-2) \cdots (2N-2l+1)}{2l \cdot (2l-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{{}^{2N}C_l \cdot (2N-2) \cdots (2N-2l+2)}{2l \cdot (2l-2) \cdots 4 \cdot 2} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{偶数の項のみ集めた}} \\ & \quad \cdot \frac{(2N-1) \cdot (2N-3) \cdots (2N-2l+1)}{(2l-1) \cdot (2l-3) \cdots 3 \cdot 1} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{奇数の項のみ集めた}} \end{aligned}$$

強者の戦略

$$= \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-l+1)}{l \cdot (l-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(2N-1) \cdot (2N-3) \cdot \dots \cdot (2N-2l+1)}{(2l-1)!!}$$

$$= {}_N C_l \cdot \frac{(2N-1) \cdot (2N-3) \cdot \dots \cdot (2N-2l+1)}{(2l-1)!!}$$

である。ここで、 $(2l-1)!!$ は二重階乗で

$$(2l-1)!! = (2l-1) \cdot (2l-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$$

を表す。

よって

$${}_{2N} C_{2l} - {}_N C_l$$

$$= \frac{{}_N C_l}{(2l-1)!!} \cdot \{(2N-1) \cdot (2N-3) \cdot \dots \cdot (2N-2l+1) - (2l-1)!!\}$$

である。

$$(2N-1) \cdot (2N-3) \cdot \dots \cdot (2N-2l+1) - (2l-1)!!$$

を A とおくと

$${}_{2N} C_{2l} - {}_N C_l = \frac{{}_N C_l A}{(2l-1)!!} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である。

③ の分母の $(2l-1)!!$ が奇数であるから、③ の分子の ${}_N C_l A$ が $2N$ で割り切れることを示せばよい。

ここで、 $2N$ を法とすると

$$(2N-1) \cdot (2N-3) \cdot \dots \cdot (2N-2l+1)$$

$$\equiv (-1) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-2l+1)$$

$$\equiv (-1)^l \cdot (2l-1)!!$$

となる。

(i) l が偶数のとき

$$A \equiv (2l-1)!! - (2l-1)!! \equiv 0$$

となるから、③ の分子は $2N$ で割り切れ、 ${}_{2N} C_{2l} - {}_N C_l$ が $2N$ で割り切れることが分かる。

(ii) l が奇数のとき

$$A \equiv -(2l-1)!! - (2l-1)!!$$

$$\equiv -2 \cdot (2l-1)!!$$

であるから、 A は偶数である。 $N = 2^n$ であり、 l は奇数であるから、 N と l は互いに素である。よって、(*) より

$${}_l N C_l = {}_{N-1} C_{l-1}$$

であるから、 ${}_N C_l$ が N で割り切れる。したがって、③ の分子は $2N$ で割り切れ、 ${}_{2N} C_{2l} - {}_N C_l$ が $2N$ で割り切れることが分かる。

以上より、 $(x+1)^{2n+1} - (x^2+1)^{2n}$ のすべての係数が 2^{n+1} で割り切れることと、 $m > n+1$ のとき、 2^m で割り切れない係数が存在することが示されたから、最大の m が $n+1$ であることが示された。□

(*) の証明

$$b_a C_b = b \cdot \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(b-1)!(a-b)!}$$

であり

$$a_{a-1} C_{b-1} = a \cdot \frac{(a-1)!}{(b-1)! \{(a-1)-(b-1)\}!}$$

$$= \frac{a!}{(b-1)!(a-b)!}$$

であるから

$$b_a C_b = a_{a-1} C_{b-1}$$

が成り立つ。□

* * * *

【解説1】

二項定理を使い各項の係数を求め、それらが 2^{n+1} で割り切れることを証明しました。

x の奇数次の項の係数が ${}_{2n+1} C_{2l+1}$ 、偶数次の係数が ${}_{2n+1} C_{2l} - {}_{2n} C_l$ になりますね。

奇数次については、有名な公式(*)を用いるとすぐに示せます。(*)については、頻出です。フェルマーの小定理の証明などでも使います。京大の過去問でいえば、1977年にフェルマーの小定理と同値な形の命題の証明が出題されています。

p が素数であれば、どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる。このことを、 n についての数学的帰納法で証明せよ。

[1977 年前期文系第 5 問]

強者の戦略

他に二項定理を利用する問題といえば1995年前期理系第2問や2000年前期理系第4問などが有名でしょう。余裕のある人は挑戦してみてください。

a, b は $a > b$ を満たす自然数とし、 p, d は素数で $p > 2$ とする。このとき、 $a^p - b^p = d$ であるならば、 d を $2p$ で割った余りが1であることを示せ。
[1995年前期理系第2問]

p を素数、 a, b を互いに素な正の整数とすると、 $(a + bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし i は虚数単位を表す。
[2000年前期理系第4問]

* * *

問題は偶数次です。これは大変です。定義をいろいろ弄っていけば、 ${}_2NC_{2l}$ から ${}_NC_l$ をくくりだせることが分かりますが、そのあともひと山ふた山あります。これらを試験会場の緊張感の中で初見で正しく変形するためには相当な実力が必要でしょう。

二項係数を、定義を使って変形していかざるを得ない証明問題といえば、次の問題もあります。結構難しいので、かなり余裕のある人向けです。

n が相異なる素数 p, q の積、 $n = pq$ 、であるとき、 $(n-1)$ 個の数 ${}_nC_k$ ($1 \leq k \leq n-1$) の最大公約数は1であることを示せ。
[1997年前期理系第2問]

二項係数のさらなる超難問としては、次もあります。もうここまでくると時間内に解ける受験生が本当に存在するのかわからなくなってきます。

p を3以上の素数とし、 a を整数とする。このとき、 p^2 以上の整数 n であって

$${}_nC_{p^2} \equiv a \pmod{p^3}$$

を満たすものが存在することを示せ。

[2023年特色入試第4問]

* * *

二項係数を直接変形していくのは厳しい！現実的には、別の方針でいくほうがよさそうです。

$(x^2 + 1)$ をひとまとまりと見て展開を工夫すると、次の【解法2】になります。以下、公式(*)は示せているとして、断りなく使用します。

【解答2】

$$P = x^2 + 1, N = 2^n \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} & (x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n} \\ &= (x^2+2x+1)^{2^n} - (x^2+1)^{2^n} \\ &= (P+2x)^N - P^N \\ &= \sum_{k=0}^N {}_NC_k P^{N-k} \cdot (2x)^k - P^N \\ &= \sum_{k=1}^N {}_NC_k P^{N-k} \cdot (2x)^k \\ &= \sum_{k=1}^N 2^k {}_NC_k P^{N-k} x^k \\ &= \sum_{k=1}^N 2^k \cdot \frac{N}{k} {}_{N-1}C_{k-1} P^{N-k} x^k \end{aligned}$$

と変形できる。

$P^{N-k} x^k (= (x^2+1)^{N-k} x^k)$ について、 $k \geq 2$ のとき x の1次の項を含まない。 $P^{N-k} (= (x^2+1)^{N-k})$ の定数項が1であることに注意すると、 x の1次の項の係数は、 $k=1$ のときを考えて、 $2^1 \cdot {}_NC_1 = 2^{n+1}$ である。 $m > n+1$ のとき、これは 2^m で割り切れない。

強者の戦略

次に、すべての係数が 2^{n+1} で割り切れることを示す。 $k = 1, 2, \dots, N$ について、 k が 2 で最大 r 回割り切れるとすると

$$k = 2^r \cdot l \quad (r \text{ は負でない整数, } l \text{ は正の奇数})$$

と表すことができる。

$$2^k \cdot \frac{N}{k} = \frac{2^{k+n}}{2^r \cdot l} = \frac{2^{n+k-r}}{l}$$

であり、 $2^k {}_N C_k \left(= 2^k \cdot \frac{N}{k} {}_{N-1} C_{k-1} \right)$ は整数であるから、 $\frac{2^{n+k-r}}{l} {}_{N-1} C_{k-1}$ は整数である。 l が奇数であるから、 2^{n+k-r} と l は互いに素である。 よって、 ${}_{N-1} C_{k-1}$ は l で割り切れる。 したがって、 $2^k \cdot \frac{N}{k} {}_{N-1} C_{k-1}$ は 2^{n+k-r} の倍数となるから、 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して

$$n + k - r \geq n + 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

であることを示せばよい。

$r = 0$ のとき、 $k \geq 1$ より $\textcircled{4}$ は成り立つ。

$r \geq 1$ のとき

$$2^r = (1+1)^r = \sum_{i=0}^r {}_r C_i \geq {}_r C_0 + {}_r C_1 = 1 + r$$

であり、 $l \geq 1$ であるから

$$k = 2^r \cdot l \geq 1 + r$$

が成り立つ。 よって、 $\textcircled{4}$ が成り立つ。

したがって、すべての係数が 2^{n+1} で割り切れる。

以上より、 $(x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$ のすべての係数が 2^{n+1} で割り切れることと、 $m > n+1$ のとき、 2^m で割り切れない係数が存在することが示されたから、最大の m が $n+1$ であることが示された。 $\square$

* * * *

【解説 2】

【解答 1】に比べて、かなりすっきりした解答になりました。肝となるのは、公式 (*) を用いて

$$2^k \cdot \frac{N}{k} \left(= \frac{2^{n+k}}{k} \right) \text{ が } 2^{n+1} \text{ で割り切れる}$$

の証明に帰着させるところです。

「分母の k の素因数 2 の指数が k 未満であること」が示せたらよく、これなら似たような問題の経験がある人も多いのではないのでしょうか。

$$k = 2^r \cdot l \quad (r \text{ は負でない整数, } l \text{ は正の奇数})$$

とおいて考えることは、京大レベルでは典型解法・定石といってよいでしょう。また

$$2^r \geq 1 + r$$

の証明において、二項定理や数学的帰納法を用いる方針についても

数列の極限：はさみうちの原理の利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \text{ を求めよ。}$$

といった問題などで頻出です。

これなら、試験会場でもなんとかなりそうかも？

* * * *

さて、最後に、多くの人にとってより取り組みやすいであろう「数学的帰納法」での解法を紹介します。

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ &= (a-b)\{(a-b) + 2b\} \end{aligned}$$

という変形で次数を下げて形を整え、数学的帰納法の仮定が使える形にします。

【解答 3】

$(x^2+1)^{2^n}$ には x の 1 次の項はないから、二項定理により、 $(x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$ の x の 1 次の項の係数は 2^{n+1} であることが分かる。 $m > n+1$ のとき、 2^{n+1} は 2^m で割り切れない。

以下、すべての正の整数 n について

$$(x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n} \text{ のすべての係数が } 2^{n+1} \text{ で割り切れること} \quad \dots\dots\dots (**)$$

を数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ について

$$(x+1)^4 - (x^2+1)^2 = 4x^3 + 4x^2 + 4x$$

強者の戦略

であるから、 $n = 1$ のとき (**) は成り立つ。

(ii) $n = k$ のときの (**) を仮定する。

すなわち $(x+1)^{2^{k+1}} - (x^2+1)^{2^k}$ のすべての係数が 2^{k+1} で割り切れると仮定する。

このとき、 $n = k+1$ のときの (**) が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} & (x+1)^{2^{k+2}} - (x^2+1)^{2^{k+1}} \\ &= \{(x+1)^{2^{k+1}}\}^2 - \{(x^2+1)^{2^k}\}^2 \\ &= \{(x+1)^{2^{k+1}} - (x^2+1)^{2^k}\} \\ & \quad \cdot \{(x+1)^{2^{k+1}} + (x^2+1)^{2^k}\} \end{aligned}$$

である。

数学的帰納法の仮定より、 $(x+1)^{2^{k+1}} - (x^2+1)^{2^k}$ のすべての係数が 2^{k+1} で割り切れる。また

$$\begin{aligned} & (x+1)^{2^{k+1}} + (x^2+1)^{2^k} \\ &= (x+1)^{2^{k+1}} - (x^2+1)^{2^k} + 2(x^2+1)^{2^k} \end{aligned}$$

より、 $(x+1)^{2^{k+1}} + (x^2+1)^{2^k}$ のすべての係数が 2 で割り切れる。

したがって、 $(x+1)^{2^{k+2}} - (x^2+1)^{2^{k+1}}$ のすべての係数は、 $2^{k+1} \cdot 2$ すなわち 2^{k+2} で割り切れる。

以上から、すべての正の整数 n について (**) が成り立つ。

したがって、 $(x+1)^{2^{n+1}} - (x^2+1)^{2^n}$ のすべての係数が 2^{n+1} で割り切れることと、 $m > n+1$ のとき、 2^m で割り切れない係数が存在することが示されたから、最大の m が $n+1$ であることが示された。□

* * * *

【解説 3】

$n = 1, 2$ のときの実験を通じて、「 $n = k$ のときの仮定から $n = k+1$ のときを導くにはどうしたらいいか？」という視点があれば、比較的思いつきやすい解答です。これなら、自信をもって書ききれる受験生も多そうですね。

本番の試験会場では【解答 3】の方針を利用して答案を作り上げるのがオススメです。

似たような発想を用いる問題として、2010 年前期理系・乙第 5 問が挙げられます。

次の問に答えよ。

(1) n を正の整数、 $a = 2^n$ とする。 $3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが、 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。

(2) m を正の偶数とする。 $3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ。

[2010 年前期理系・乙第 5 問]

また、二項定理で展開するか、数学的帰納法を用いるかの選択を迫られる問題としては、2013 年前期理系第 3 問もあります。

n を自然数とし、整数 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする。このとき a と b は整数であり、さらにそれらをとともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

[2013 年前期理系第 3 問]

* * * *

今回の記事は、かなり長くなってしまいました。二項係数 ${}_nC_k$ 絡みの問題は、どうしても様々な性質の知識や、ある程度の経験が必要なため、試験会場での再現性に不安が残ります。普段から自分の手を動かして実験し、また、いろいろな考え方に触れていってください。

みなさまの健闘を祈ります！

(数学科 笹谷)